
Universal Algebras by T.M. Baranovic

James Parker Ladwig

Publication Date

08-12-2023

License

This work is made available under a Exclusive rights in copyrighted work license and should only be used in accordance with that license.

Citation for this work (American Psychological Association 7th edition)

Ladwig, J. P. (2022). *Universal Algebras by T.M. Baranovic* (Version 1). University of Notre Dame.
<https://doi.org/10.7274/2f75r784v4s>

This work was downloaded from CurateND, the University of Notre Dame's institutional repository.

For more information about this work, to report or an issue, or to preserve and share your original work, please contact the CurateND team for assistance at curate@nd.edu.

Трубопроводному

профессору Тетсу

от автора.

"Книга посвящена многим"

~~Баранович~~

Baranovič

Univers Universal algebras

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Т. М. Баранович

До последнего времени основы теории универсальных алгебр были изложены в двух книгах Г. Биркгофа «Теория структур» [4] и А. Г. Куроша «Лекции по общей алгебре» [23]. Недавно вышли книга П. Кона «Универсальная алгебра» [44], охватывающая значительную часть результатов по теории универсальных алгебр, и книга Б. И. Плоткина «Группы автоморфизмов алгебраических систем» [33]. Поэтому естественно было основное внимание уделить в обзоре тем направлениям, которые мало затронуты или вовсе не затронуты в этих книгах. Таким образом получилось, что настоящий обзор посвящен работам по универсальным алгебрам, прореферированным в РЖМат в 1964—1966 гг. Однако довольно часто для полноты и связности изложения приводятся более ранние результаты.

Чтобы точно указать, о чем будет идти речь в дальнейшем, дадим несколько определений.

Пусть G — некоторое множество и ω — $(n+1)$ -арное отношение на множестве G , т. е. подмножество $(n+1)$ -й декартовой степени G^{n+1} множества G ($n = 0, 1, 2, \dots$). Отношение ω называется частичной n -арной операцией на множестве G , если из того, что $(a_1, \dots, a_n, a), (a_1, \dots, a_n, b) \in \omega$ вытекает $a = b$. В таком случае элемент a называется результатом применения операции ω к набору элементов a_1, \dots, a_n и обозначается $a = a_1 \dots a_n \omega$. Подмножество множества G^n , для каждого элемента которого (a_1, \dots, a_n) существует такой элемент $a \in G$, что $(a_1, \dots, a_n, a) \in \omega$, называется областью определения частичной операции ω , а число $n = n(\omega)$ — арностью операции ω . Частичная операция ω называется операцией на множестве G , если ее область определения совпадает со всем множеством G^n . $(n+1)$ -арное отношение ω называется многозначной операцией на мно-

дает не больше чем одной неподвижной точкой, или условию 6, называются ν -алгебрами. По-другому, ν -алгебры можно охарактеризовать как такие Ω -алгебры, в которых всякое равенство вида $x_1 \dots x_n \omega_1 = x_1 \dots x_n \omega_2$, не тождественное относительно x_n , эквивалентно равенству $x_n \cdot x_1 \dots x_{n-1} \omega$ (здесь ω_1, ω_2 — n -арные, ω — $(n-1)$ -арная производные алгебраические операции данной алгебры). Иным, чем ν^* -алгебры, обобщением ν -алгебр является понятие ν_* -алгебры: Ω -алгебра G называется ν_* -алгеброй, если всякое равенство вида $x_1 \dots x_n \omega_1 = x_1 \dots x_n \omega_2$, не тождественное относительно одного из x_j , эквивалентно равенству вида $x_i = x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n \omega$, где $\omega_1, \omega_2, \omega$ — такие же, как выше, $1 \leq i, j \leq n$. Нетрудно видеть, что всякая ν_* -алгебра является ν^* -алгеброй. Получено описание ν_* -алгебр, из которого вытекает, в частности, что классы ν^* -алгебр и ν_* -алгебр различны. Вопрос об описании произвольных ν^* -алгебр остается открытым.

С помощью отношения зависимости, определенного в алгебрах некоторого класса \mathfrak{K} , можно ввести понятие алгебраически замкнутого алгебраического расширения. При некоторых условиях на класс \mathfrak{K} и отношение зависимости удастся доказать теорему о существовании и единственности алгебраического замкнутого алгебраического расширения для любой \mathfrak{K} -алгебры [44, 77], из которой вытекает, например, классическая теорема для полей.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Баранович Т. М., О политождествах в универсальных алгебрах. Сибирск. матем. ж., 1964, 5, № 5, 976—986 (РЖМат, 1965, 7A244)
2. —, Свободные разложения в пересечении примитивных классов алгебр. Матем. сб., 1965, 67, № 1, 135—153 (РЖМат, 1965, 10A291)
3. —, Свободные разложения в некоторых примитивных классах универсальных алгебр. Сибирск. матем. ж., 1966, 7, № 6, 1230—1249 (РЖМат, 1967, 11A264)
4. Биркгоф Г., Теория структур. ИЛ, 1951
5. Бурмистрович И. Е., Алгебры с переменными операциями. VII Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре. Резюме сообщений и докладов, Кишинев, 1965
6. Валуцэ И. И., Универсальные алгебры с правильными, но не перестановочными конгруэнциями. Успехи матем. наук, 1963, 18, № 3, 145—148 (РЖМат, 1964, 3A243)
7. —, Левые идеалы полугруппы эндоморфизмов свободной универсальной алгебры. Матем. сб., 1963, 62, № 3, 371—384 (РЖМат, 1964, 7A297)
8. —, Об эндоморфизмах одного класса универсальных алгебр. В сб. «Материалы докл. I-й Научно-технической конференции Кишиневск. политехн. ин-та». Кишинев, 1965, 90—91 (РЖМат, 1965, 12A337)
9. Гайнос А. Т., Коммутативные свободные и антикоммутативные свобод-

- ные произведения алгебр. Докл. АН СССР, 1960, 133, № 6, 1275—1278 (РЖМат, 1961, 6A294)
10. Гечег Ф., О некоторых классах полумодулей и модулей. Acta scient. math., 1963, 24, № 1-2, 165—172 (РЖМат, 1964, 7A308)
 11. Иванов И. С., Свободные T -суммы мультиоператорных дел. Докл. АН СССР, 1965, 165, № 1, 28—30 (РЖМат, 1966, 4A212)
 12. Искандер А. А., Универсальные алгебры с соотношениями и амальгамы. Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1965, № 4, 22—28 (РЖМат, 1966, 6A247)
 13. —, Структура соответствий универсальной алгебры. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, 29, № 6, 1357—1372 (РЖМат, 1966, 5A279)
 14. —, Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий. Матем. сб., 1966, 70, № 3, 438—456 (РЖМат, 1967, 10A222)
 15. Каролинская Л. Н., Прямые разложения абстрактных алгебр с отмеченными подалгебрами. Изв. высш. учебн. заведений, Матем., 1960, № 4, 106—113 (РЖМат, 1962, 6A242)
 16. Коголовский С. Р., Об универсальных классах алгебр, замкнутых относительно прямых произведений. Успехи матем. наук, 1958, 13, № 3, 241—242 (РЖМат, 1961, 1A274)
 17. —, К теореме Биркгофа. Успехи матем. наук, 1965, 20, № 5, 206—207 (РЖМат, 1966, 3A258)
 18. —, Обобщенно квазиуниверсальные классы моделей. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, 29, № 6, 1273—1282 (РЖМат, 1966, 5A283)
 19. Копейкина Л. И., Свободные разложения проективных плоскостей. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, 9, № 6, 495—526
 20. Курош А. Г., Неассоциативные свободные суммы алгебр. Матем. сб., 1955, 37, № 2, 251—264 (РЖМат, 1956, 3706)
 21. —, Свободные суммы мультиоператорных алгебр. Сибирск. матем. ж., 1960, 1, № 1, 62—70 (РЖМат, 1961, 4A216), Исправление, Сибирск. матем. ж., 1960, 1, № 4, 638 (РЖМат, 1961, 4A217)
 22. —, Свободные суммы мультиоператорных групп. Acta scient. math., 1960, 21, № 3-4, 187—196 (РЖМат, 1961, 4A218)
 23. —, Лекции по общей алгебре. Физматгиз, Москва, 1962
 24. Лившиц А. Х., Прямые разложения в алгебраических категориях. Тр. Моск. матем. о-ва, 1960, 9, 129—141 (РЖМат, 1961, 12A335)
 25. —, Прямые разложения идемпотентов в полугруппах. Докл. АН СССР, 1960, 134, № 2, 271—274 (РЖМат, 1962, 2A233)
 26. Мальцев А. И., К общей теории алгебраических систем. Матем. сб., 1954, 35, № 1, 3—20 (РЖМат, 1957, 209)
 27. —, Свободные топологические алгебры. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, 21, № 2, 171—198 (РЖМат, 1958, 1882)
 28. —, Определяющие соотношения в категориях. Докл. АН СССР, 1958, 119, № 6, 1095—1098 (РЖМат, 1959, 5634)
 29. —, Структурная характеристика некоторых классов алгебр. Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 29—32 (РЖМат, 1959, 5635)
 30. —, Квазипримитивные классы абстрактных алгебр. Докл. АН СССР, 1956, 108, № 2, 187—189 (РЖМат, 1959, 174)
 31. —, Модельные соответствия. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, 23, № 3, 313—336 (РЖМат, 1960, 12554)
 32. —, Несколько замечаний о квазимногочисленных алгебраических системах. Алгебра и логика. Семинар, 1966, 5, № 3, 3—9 (РЖМат, 1967, 2A243)
 33. Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. М., «Наука», 1966, 603 стр.
 34. Скорняков Л. А., Неассоциативные свободные T -суммы тел. Матем. сб., 1958, 44, № 3, 297—312 (РЖМат, 1959, 10889)
 35. Чакаш Б., Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полу-

- модулей и модулей. *Acta scient. math.*, 1963, 2—4, № 1-2, 157—164 (РЖМат, 1964, 7A307)
36. —, Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр. *Acta scient. math.*, 1964, 25, № 3-4, 202—208 (РЖМат, 1965, 3A264)
 37. Шайн Б. М., К теореме Биркгофа—Коголовского. *Успехи матем. наук*, 1965, 20, № 6, 173—174 (РЖМат, 1966, 5A278)
 38. Ширшов А. И., Подалгебры свободных левых алгебр. *Матем. сб.*, 1953, 33, № 2, 441—452 (РЖМат, 1954, 2030)
 39. Adam A., On the definitions of direct product of universal algebra. *Publ. Math.*, 1959, 6, № 3-4, 303—309 (РЖМат, 1965, 10A288)
 40. Astromoff A., Some structure theorems for primal and categorical algebras. *Math. Z.*, 1965, 87, № 3, 365—377 (РЖМат, 1965, 10A290)
 41. Bates G. E., Free loops and nets and their generalisations. *Amer. J. Math.*, 1947, 69, 499—550
 42. Birkhoff G., Frinc O., Representation of lattices by sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1948, 64, 299—316
 43. Chang C. C., Jónsson B., Tarski A., Refinement properties for relational structures. *Fundam. Math.*, 1964, 55, № 3, 249—281 (РЖМат, 1966, 3A249)
 44. Cohn P., *Universal algebra*. New York, Harper and Brathers 1965 (РЖМат, 1967, 5A276K)
 45. Crawley P., Jónsson B., Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems. *Pacif. J. Math.*, 1964, 14, № 3, 797—855 (РЖМат, 1966, 6A249)
 46. Csákány B., Inner automorphisms of universal algebra. *Publ. math. (Debrecen)*, 1965, 12, № 1-4, 331—333 (РЖМат, 1967, 4A227)
 47. Evans T., Embeddability and the word problem. *J. London Math. Soc.*, 1953, 28, № 109, 76—80 (РЖМат, 1953, 119)
 48. —, Properties of algebras almost equivalent to identities. *J. London Math. Soc.*, 1962, 37, № 1, 53—59 (РЖМат, 1963, 3A256)
 49. —, The isomorphism problem for some classes of multiplicative systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1963, 109, № 2, 303—312 (РЖМат, 1965, 2A327)
 50. —, Endomorphisms of abstract algebras. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1961—1962, A66, № 1, 53—64 (РЖМат, 1963, 6A262)
 51. Feigelstock S., A universal subalgebra theorem. *Amer. Math. Monthly*, 1965, 72, 8, 884—888 (РЖМат, 1966, 9A227)
 52. Foster A., The identities of — and unique subdirect factorisation within — classes of universal algebras. *Math. Z.*, 1955, 62, № 2, 171—188 (РЖМат, 1956, 7213)
 53. —, Pixley A., Semi-categorical algebras. I. Semi-primal algebras. *Math. Z.*, 1964, 83, № 2, 147—169 (РЖМат, 1965, 3A365)
 54. —, —, Semi-categorical algebras. II. *Math. Z.*, 1964, 85, № 2, 169—184 (РЖМат, 1965, 10A294)
 55. —, Algebraic and Equational semi-maximality; equational spectra. I. *Math. Z.*, 1966, 92, № 1, 30—50 (РЖМат, 1967, 10A227)
 56. Frayne T., Morel A. C., Scott D. S., Reduced direct products. *Fundam. math.*, 1962, 51, № 3, 195—228 (РЖМат, 1965, 3A370)
 57. Fujiwara T., Note on isomorphism problem for free algebraic systems. *Proc. Japan Acad.*, 1955, 31, № 3, 135—136 (РЖМат, 1956, 6464)
 58. —, Remarks on the Jordan-Hölder-Schreier theorem. *Proc. Japan Acad.*, 1955, 31, 3, 137—140 (РЖМат, 1957, 6895)
 59. —, On mappings between algebraic system. I. *Osaka Math. J.*, 1959, 11, № 2, 153—172 (РЖМат, 1961, 6A316)
 60. —, On mappings between algebraic systems. II. *Osaka Math. J.*, 1960, 12, № 2, 253—268 (РЖМат, 1962, 2A298)

61. —, On the permutability of congruences on algebraic systems. *Proc. Japan Acad.*, 1964, 40, 10, 787—792 (PJKMar, 1966, 3A259)
62. —, Murata K., On the Jordan-Hölder-Schreier theorem. *Proc. Japan Acad.*, 1953, 29, 151—153 (PJKMar, 1957, 5393)
63. Goldie A. W., The Jordan-Hölder theorem for general algebras. *Proc. London Math. Soc.*, 1950, 52, 107—131
64. —, The scope of the Jordan-Hölder-Schreier theorem in abstract algebra. *Proc. London Math. Soc.*, 1952, 2, № 7, 349—368
65. Grätzer G., Free algebras over first order axiom systems. *Magyar tud. akad. Mat. Kutató int. közl.*, 1963, 8, № 1-2, 193—199 (PJKMar, 1965, 3A366)
66. —, On the family of certain subalgebras of universal algebra. *Proc. Koninkl. akad. wet.*, 1965, A68, № 5, 790—802 (PJKMar, 1965, 9A226)
67. —, On the Jordan-Hölder theorem for universal algebras. *Magyar tud. akad. mat. Kutató int. közl.*, 1963(1964), 8, № 3, 397—406 (PJKMar, 1965, 10A287)
68. —, Schmidt E. T., Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. *Acta scient. math.*, 1963, 24, № 1-2, 34—59 (PJKMar, 1964, 5A225)
69. Hashimoto J., Direct, subdirect decompositions and congruence relations. *Osaka Math. J.*, 1957, 9, № 1, 87—112 (PJKMar, 1959, 1297)
70. Hewitt G., The existence of free unions in classes of abstract algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1963, 14, № 3, 417—422 (PJKMar, 1964, 5A230)
71. Higgins P. J., Algebras with a scheme of operators. *Math. Nachr.*, 1963, 27, № 1-2, 115—132 (PJKMar, 1964, 11A232)
72. —, Presentations of groupoids with applications to groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1964, 60, № 1, 7—20 (PJKMar, 1964, 9A193)
73. Hilton P. J., Ledermann W., On the Jordan-Hölder theorem in homological monoids. *Proc. London Math. Soc.*, 1960, 10, № 3, 321—334 (PJKMar, 1962, 7A232)
74. Hughes N. J. S., The Jordan-Hölder-Schreier theorem for general algebraic systems. *Compositio math.*, 1960, 14, № 3, 228—236 (PJKMar, 1961, 8A276)
75. Isbell J. R., Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras. *Rozpr. math.*, 1964, 36, 3—36 (PJKMar, 1965, 3A346)
76. Jacobs E., Schwabauer R., The lattice of equational classes of algebras with one unary operation. *Amer. Math. Monthly*, 1964, 71, № 2, 151—155 (PJKMar, 1965, 2A382)
77. Jónsson B., Algebraic extensions of relational systems. *Math. Scand.*, 1962, 11, № 2, 179—205 (PJKMar, 1964, 7A310)
78. —, Tarski A., On two properties of free algebras. *Math. Scand.*, 1961, 9, № 1a, 95—101 (PJKMar, 1962, 3A72)
79. Kalicki J., The number of equationally complete classes of equations. *Proc. Koninkl. nederl. akad. metensch.*, 1955, A58, № 5, 660—662 (PJKMar, 1958, 5578)
80. —, Scott D., Equational completeness of abstract algebras. *Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch.*, 1955, A58, № 5, 650—659 (PJKMar, 1958, 2776)
81. Keisler H. J., On some results of Jónsson and Tarski concerning free algebras. *Math. Scand.*, 1961, 9, № 1a, 102—106 (PJKMar, 1962, 3A73)
82. —, Ultraproducts and elementary classes. *Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch.*, 1961, A64, № 5, 477—495 (PJKMar, 1962, 8A76)
83. Kochen S., Ultraproducts in the theory of models. *Ann. Math.*, 1961, 74, № 2, 221—261 (PJKMar, 1963, 6A77)

84. Kolibiar M., Über directe Producte von Relativen. Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianac Math., 1965, 10, № 3, 1—9 (PJKMar, 1966, 7A327)
85. Lambek J., Goursat's theorem and the Zassenhaus lemma. Canad. J. Math., 1958, 10, № 1, 45—56 (PJKMar, 1959, 4524)
86. Lawvere F. W., Functorial semantics of algebraic theories. Proc. Nat. Acad. Sci., 1963, 50, № 5, 869—872 (PJKMar, 1965, 1A285)
87. Lyndon R. C., Properties preserved under algebraic constructions. Bull. Amer. Math. Soc., 1959, 65, № 5, 287—299 (PJKMar, 1961, 7A98)
88. Loś J., Normal subalgebras in general algebras. Colloq. math., 1964, 12, № 2, 151—153 (PJKMar, 1966, 1A401)
89. Makkai M., Solution of a problem of G. Grätzer concerning endomorphism semigroups. Acta math. Acad. scient. hung., 1964, 15, № 3-4, 297—307 (PJKMar, 1965, 8A184)
90. Marczewski E., A general scheme of the notions of independence in mathematics. Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 12, 731—736 (PJKMar, 1959, 9722)
91. —, Nombre d'éléments indépendents et nombre d'éléments générateurs dans les algèbres abstraites finies. Ann. mat. pura et appl., 1962, 59, 1—9 (PJKMar, 1963, 7A208)
92. Mitchell B., The full imbedding theorem. Amer. J. Math., 1964, 86, № 3, 619—657 (PJKMar, 1965, 10A280)
93. Monk D., On pseudo-simple universal algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, 13, № 4, 543—546 (PJKMar, 1963, 4A222)
94. Neumann P. M., Wiegold J., Schreier varieties of groups. Math. Z., 1964, 85, № 5, 392—400 (PJKMar, 1965, 7A180)
95. Pierce R. S., A note on free products of abstract algebras. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1963, A66, № 3, 401—407 (PJKMar, 1964, 4A255)
96. Pixley A. F., Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, № 1, 105—109 (PJKMar, 1964, 1A321)
97. Ribeiro H., Schwabauer R., A remark on equational completeness. Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1965, 7, № 3-4, 122—123 (PJKMar, 1966, 5A280)
98. Schmidt E. T., Universale Algebren mit gegebenen Automorphismengruppen und Kongruenzverbänden. Acta math. Acad. scient. hung., 1964, 15, № 1-2, 37—45 (PJKMar, 1965, 2A383)
99. —, Universale Algebren mit gegebenen Automorphismengruppen und Unterhalbgruppenverbänden. Acta scient. math. 1963, 24, № 3-4, 251—254 (PJKMar, 1965, 2A384)
100. Schmidt J., Algebraic operations and algebraic independence in algebras with infinitary operations. Math. japon., 1962, 6, № 3-4, 77—112 (PJKMar, 1965, 1A292)
101. —, Some properties of algebraically independent sets in algebras with infinitary operations. Fundam. math., 1964, 55, № 2, 123—137 (PJKMar, 1965, 12A335)
102. Słominski J., On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equationally definable constant elements. Fundam. Math., 1960, 48, № 3, 325—341 (PJKMar, 1961, 10A275)
103. —, A theory of extensions of quasi-algebras to algebras. Ropr. mat., 1964, 40, 63 (PJKMar, 1965, 12A336)
104. —, On mappings between quasi-algebras. Colloq. math., 1966, 15, № 1, 25—44
105. Swierczowski S., On isomorphic free algebras. Bull. Acad. polon.

- sci., Ser. sci. math., astron. et phys., 1960, 8, № 9, 587—588 (PЖMar, 1961, 10A272)
106. —, On two numerical constants associated with finite algebras. Ann. mat. pura ed appl., 1963, 62, 241—245 (PЖMar, 1965, 3A362)
107. Tarski A., Equationally complete rings and relation algebras. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. A-Indagationes math., 1956, A59, № 1, 39—46 (PЖMar, 1958, 1043)
108. Thurston H. A., Derived operations and congruences. Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 29, 127—134 (PЖMar, 1959, 173)
109. Urbanik K., Remarks on independence in finite algebras. Colloq. math., 1963, 11, № 1, 1—12 (PЖMar, 1965, 1A290)
110. —, Linear independence in abstract algebras. Colloq. math., 1964, 14, 233—255 (PЖMar, 1967, 9A184)
111. Vaught R., Elementary classes closed under descending intersections. Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 17, № 2, 430—433 (PЖMar, 1967, 3A67)
-