Universal Algebras by T.M. Baranovic

James Parker Ladwig

Publication Date

08-12-2023

HELLO

470

Глубокоуважаемому профессору Тетцу от автора.

„Лучше поздно, чем никогда"

Баранов

Baranović

~~Univers~~ Universal algebras

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Т. М. Баранович

До последнего времени основы теории универсальных алгебр были изложены в двух книгах Г. Биркгофа «Теория структур» [4] и А. Г. Куроша «Лекции по общей алгебре» [23]. Недавно вышли книга П. Кона «Универсальная алгебра» [44], охватывающая значительную часть результатов по теории универсальных алгебр, и книга Б. И. Плоткина «Группы автоморфизмов алгебраических систем» [33]. Поэтому естественно было основное внимание уделить в обзоре тем направлениям, которые мало затронуты или вовсе не затронуты в этих книгах. Таким образом получилось, что настоящий обзор посвящен работам по универсальным алгебрам, прореферированным в РЖМат в 1964—1966 гг. Однако довольно часто для полноты и связности изложения приводятся более ранние результаты.

Чтобы точно указать, о чем будет идти речь в дальнейшем, дадим несколько определений.

Пусть G — некоторое множество и ω — $(n+1)$-арное отношение на множестве G, т. е. подмножество $(n+1)$-й декартовой степени G^{n+1} множества G $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Отношение ω называется частичной n-арной операцией на множестве G, если из того, что $(a_1, \ldots, a_n, a)$, $(a_1, \ldots, a_n, b) \in \omega$ вытекает $a = b$. В таком случае элемент a называется результатом применения операции ω к набору элементов $a_1, \ldots, a_n$ и обозначается $a = a_1 \ldots a_n\omega$. Подмножество множества G^n, для каждого элемента которого $(a_1, \ldots, a_n)$ существует такой элемент $a \in G$, что $(a_1, \ldots, a_n, a) \in \omega$, называется областью определения частичной операции ω, а число $n = n(\omega)$ — арностью операции ω. Частичная операция ω называется операцией на множестве G, если ее область определения совпадает со всем множеством G^n. $(n+1)$-арное отношение ω называется многозначной операцией на множестве G, если для любого $(a_1, \ldots, a_n) \in G^n$ существует такой элемент $a \in G$, не обязательно единственный, что $(a_1, \ldots, a_n, a) \in \omega$.

Пусть теперь Ω — некоторое множество, каждому элементу $\omega \in \Omega$ которого сопоставлено целое неотрицательное число $n = n(\omega)$. Через $\Omega(n)$ обозначим совокупность всех таких $\omega \in \Omega$, для которых $n(\omega) = n$, тогда $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega(n)$. *Множество* G *называется универсальной алгеброй с системой операций* $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega(n)$ *или, коротко* Ω-*алгеброй*, если для каждого $\omega \in \Omega$ на множестве G определена $n(\omega)$-арная операция, которую также будем обозначать ω.

Аналогично определяется частичная алгебра (многозначная алгебра) как множество с системой определенных на нем частичных (соответственно многозначных) операций. Ясно, что понятия алгебры, частичной алгебры, многозначной алгебры являются частными случаями понятия модели, т. е. множества с системой определенных на нем отношений.

Существенным ограничением введенных понятий является конечность арности рассматриваемых операций. Отказываясь от этого ограничения, естественно приходим к понятию алгебры с бесконечноместными операциями. Кроме того, можно рассматривать многоосновные алгебры (и модели), т. е. некоторую совокупность множеств с системой операций, связывающих по определенному закону элементы этих (в общем случае различных) множеств [71].

В дальнейшем речь будет идти только об универсальных алгебрах, хотя в последнее время появилось значительное число работ, посвященных частичным алгебрам, многозначным алгебрам, алгебрам с бесконечноместными операциями, многоосновным алгебрам, не говоря о моделях, теория которых является большим самостоятельным разделом аглебры и логики. В тех случаях, когда упоминаемые в дальнейшем результаты были на самом деле получены не только для универсальных алгебр, но и для более общих алгебраических образований, будут сделаны соответствующие примечания.

С другой стороны, существуют разделы теории универсальных алгебр, которые развиваются при тех или иных ограничениях, накладываемых на множества операций, например, теория Ω-групп, Ω-полугрупп, Ω-колец и др. Теория Ω-групп довольно полно изложена в книге А. Г. Куроша [23], а результаты, относящиеся к Ω-полугруппам и Ω-кольцам, содержатся в книге Б. И. Плоткина [33]. Поэтому в настоящем обзоре мы не будем касаться этих разделов.

§ 1. КЛАССЫ АЛГЕБР

1. Аксиоматизируемые классы алгебр и алгебраические конструкции. Класс всех алгебр с данной системой операций Ω будем обозначать через (Ω) и называть алгебры некоторого подкласса $\mathfrak{K}$ класса (Ω) $\mathfrak{K}$-алгебрами.

Пусть Σ — система предложений узкого исчисления предикатов, содержащих символы переменных, Ω — слова от этих переменных, отношение равенства и логические символы, причем кванторы существования $\exists$ и всеобщности $\forall$ связывают только переменные. Класс $\mathfrak{K}$ называется аксиоматизируемым с системой аксиом Σ, если $\mathfrak{K}$ состоит из тех и только тех Ω-алгебр, на которых истинны предложения системы Σ. Довольно долго стоял вопрос о нахождении условий, характеризующих аксиоматизируемые классы с помощью алгебраических конструкций. Эти условия были найдены на языке приведенных (относительно фильтра) произведений [82]. Дадим нужные определения.

Пусть G_α, $\alpha\in I$, — некоторое семейство Ω-алгебр и $\mathfrak{D}$ — некоторый фильтр на множестве I (т. е. совокупность подмножеств множества I, обладающая следующими свойствами: если $X, Y\in\mathfrak{D}$, то $X\cap Y\in\mathfrak{D}$, если $X\in\mathfrak{D}$, $Y\supseteq X$, то $Y\in\mathfrak{D}$, $\varnothing\notin\mathfrak{D}$). На декартовом произведении $\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ алгебр G_α, $\alpha\in I$, определим отношение δ: $((x_\alpha, \alpha\in I),\ (y_\alpha, \alpha\in I))\in\delta$ тогда и только тогда когда, $\{\alpha\in I x_\alpha = y^\alpha\}\in\mathfrak{D}$. Теперь фактормножество $\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha/\delta$ можно превратить в Ω-алгебру, определив операции $\omega\in\Omega$, $n(\omega)=n$, следующим образом: $(x_\alpha^1)\ldots(x_\alpha^n)\,\omega = (y_\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\{\alpha\in I | x_\alpha^1\ldots x_\alpha^n\omega = y_\alpha$ в $G_\alpha\in\mathfrak{D}$. Полученная Ω-алгебра называется приведенным произведением Ω-алгебр G_α, $\alpha\in I$, относительно фильтра $\mathfrak{D}$. Если $\mathfrak{D}$ — максимальный фильтр на множестве I, то приведенное произведение относительно $\mathfrak{D}$ называется ультрапроизведением. Свойства приведенных произведений и ультрапроизведений моделей изучались в [56, 83].

Сформулируем теперь критерий аксиоматизируемости класса Ω-алгебр, доказанный в [82] в предположении справедливости обобщенной гипотезы континуума:

Класс $\mathfrak{K}$ Ω-алгебр (и вообще класс моделей) аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ замкнут относительно ультрапроизведений, а дополнение $(\Omega)\setminus\mathfrak{K}$ класса $\mathfrak{K}$ в классе всех Ω-алгебр замкнуто относительно ультрастепеней.

Возникает вопрос, каким условиям должна удовлетворять система аксиом аксиоматизируемого класса Ω-алгебр $\mathfrak{K}$, чтобы аксиоматизируемый $\mathfrak{K}$ был замкнут относительно тех или иных алгебраических конструкций. Например, доказано [87], что класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно подалгебр тогда и только тогда, когда он определяется системой аксиом вида $\forall x_1 \ldots \ldots \forall x_n \Phi(x_1, \ldots x_n)$, где Φ — формула не содержащая кванторов. Описаны также системы аксиом аксиоматизируемых классов алгебр, замкнутых относительно гомоморфных образов, относительно подпрямых произведений и других конструкций (см. [87, 111], библиографию к [87]). Не выяснено, какие аксиомы характеризуют классы, замкнутые относительно прямых произведений.

Многообразием называется класс алгебр, аксиоматизируемый с помощью тождеств.

В силу известной теоремы Биркгофа, класс $\mathfrak{K}$ будет многообразием в том и только том случае, если он замкнут относительно подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. В [17] показано, что эти условия можно ослабить, а именно класс $\mathfrak{K}$ Ω-алгебр является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Другие условия такого рода найдены в [37].

Класс $\mathfrak{K}$ Ω-алгебр называется квазимногообразием, если он аксиоматизируем с помощью аксиом вида

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (w_1(x_1, \ldots, x_n) = v_1(x_1, \ldots, x_n) \mathbin{\&} \ldots$$

$$\ldots \mathbin{\&} w_m(x_1, \ldots, x_n) = v_m(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow w(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_n)),$$

называемых квазитождествами (здесь $w, w_1, \ldots, w_m, v, v_1, \ldots \ldots, v_m$ — некоторые Ω-слова).

В [32] доказано, что класс $\mathfrak{K}$ Ω-алгебр является квазимногообразием тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{K}$ содержит одноэлементную алгебру и замкнут относительно подалгебр и произвольных приведенных произведений. Имеются и другие характеризации квазимногообразий с помощью разных алгебраических конструкций (см. [30, 32, 16]). В [32] понятия многообразия и квазимногообразия естественно переносятся на модели.

2. Локальные свойства классов алгебр. Будем говорить, что класс $\mathfrak{K}$ Ω-алгебр обладает локальным свойством, если любая Ω-алгебра G, в которой существует локальная система $\mathfrak{K}$-подалгебр, принадлежит классу $\mathfrak{K}$. В работе [31] введены некоторые классы алгебр, называемые квазиуниверсальными, и доказано, что любой квазиуниверсальный класс Ω-алгебр обладает локальным свойством. Квазиуниверсальными классами алгебр являются, например, произвольный класс Ω-алгебр, аксиоматизируемый аксиомами сколемского вида, класс Ω-алгебр без нетривиальных конгруэнций, класс Ω-алгебр, не имеющих неодноэлементных истинных подалгебр.

Отметим, что квазиуниверсальными классами являются классы $\overline{RN}$-, $\overline{RI}$-, $\tilde{Z}$-, $\tilde{N}$-групп, и поэтому из упомянутой теоремы вытекают известные локальные теоремы для этих классов групп.

В работе [18] рассматривается более широкое понятие обобщенно квазиуниверсального класса алгебр. Доказано, что если некоторый класс Ω-алгебр обладает локальным свойством, то любой его квазиуниверсальный подкласс также обладает локальным свойством.

Цитированные результаты работ [31], [18] получены для произвольных моделей.

3. Эквивалентность классов алгебр. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-алгебр можно считать категорией, объектами которой являются $\mathfrak{K}$-алгебры, а отображениями — всевозможные Ω-гомоморфизмы между ними. Полученную категорию будем обозначать также через $\mathfrak{K}$.

В [86] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы произвольная категория была коэкстенсивна некоторому многообразию алгебр, а в [75] — условия коэкстенсивности категории некоторому классу алгебр, замкнутому относительно подалгебр и прямых произведений.

Два класса алгебр $\mathfrak{K}_1 \subseteq (\Omega_1)$ и $\mathfrak{K}_2 \subseteq (\Omega_2)$ называются структурно эквивалентными, если между категориями $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ можно установить такой изоморфизм, при котором носители соответствующих алгебр совпадают.

В работе [29] найдены необходимые и достаточные условия, при которых класс $\mathfrak{K}$ Ω-алгебр структурно эквивалентен некоторому классу алгебр, замкнутому относительно подалгебр и прямых произведений.

Отметим, что часто приходится рассматривать категории алгебр, в которых морфизмами являются не гомоморфизмы, а отображения, иным способом связанные с операциями этих алгебр, например, гомотопию группоидов (квазигрупп, луп), инверсный гомоморфизм группоидов (квазигрупп, луп, групп), дифференцирования колец и многие другие. По-видимому, на языке произвольных алгебр естественным определением такого обобщенного гомоморфизма могло бы быть следующее:

Пусть G_i — Ω_i-алгебра, $i=1, 2$. Пара отображений $\varphi: G_1 \to G_2$, $\psi: \Omega_1 \to \Omega_2$ называется обобщенным гомоморфизмом Ω_1-алгебры G_1 в Ω_2-алгебру G_2, если для любой операции $\omega_1 \in \Omega_1$, $n(\omega_1)=n$

и для операции $\omega_2=\omega_1\psi$, $n(\omega_2)=m$, существует такое отображение $\bar{\varphi}: G_1^n \to G_2^m$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_1^n & \xrightarrow{\omega_1} & G_1 \\ \bar{\varphi}\downarrow & & \downarrow\varphi \\ G_2^m & \xrightarrow[\omega_2]{} & G_2 \end{array}$$

коммутативна.

Нетрудно видеть, что приведенные выше примеры являются частными случаями этого определения.

Некоторый класс таких обобщенных гомоморфизмов рассматривался в [59, 60] (для частичных алгебр с бесконечноместными операциями в [104]).

Гомоморфизмом Ω_1-алгебры G_1 в Ω_2-алгебру G_2 будем называть такой обобщенной гомоморфизм (φ, ψ), что $n(\omega_1)=n(\omega_1\psi)$ и $(x_1,\ldots,x_n)\bar{\varphi}=(x_1\varphi,\ldots,x_n\varphi)$ [5]. Пусть теперь G_i — Ω_i-алгебра, $\bar{\Omega}_i$ — совокупность ее главных производных операций, $i=1,2$. Если существует изоморфизм $\bar{\Omega}_1$-алгебры G_1 на $\bar{\Omega}_2$-алгебру G_2, то Ω_1-алгебра G_1 и Ω_2-алгебра G_2 называются эквивалентными. Два класса $\mathfrak{K}_1 \subseteq (\Omega_1)$ и $\mathfrak{K}_2 \subseteq (\Omega_2)$ называются эквивалентными, если между классами $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие алгебры эквивалентны при одном и том же соответствии между $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$.

Очевидно, что если классы $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ эквивалентны, то они структурно эквивалентны. В случае, когда $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ — многообразия, эти понятия совпадают [29]. Возникает вопрос о нахождении условий, при которых некоторый класс $\mathfrak{K}$ Ω-алгебр эквивалентен данному конкретному классу алгебр. В ряде работ изучаются классы алгебр, эквивалентные различным классам модулей.

Для формулировки одного из такого рода результатов [35] нам понадобятся следующие определения:

Конгруэнция Ω-алгебры называется правильной, если она однозначно определяется любым своим классом. Многообразие $\mathfrak{B}$ называется правильным, если конгруэнции любой $\mathfrak{B}$-алгебры правильные.

Многообразие $\mathfrak{B}$ называется нормальным, если конгруэнции на любой $\mathfrak{B}$-алгебре перестановочны.

Отметим, кстати, что существуют алгебры с правильными, но не перестановочными конгруэнциями [6], существуют нормальные многообразия, не являющиеся правильными [108]. Не известно, существуют ли правильные, но не нормальные многообразия. О связях между свойствами конгруэнций и производных операций на алгебрах некоторого многообразия см. также работы [26, 61, 95] и § 4 настоящего обзора. Сформулируем теперь упомянутую теорему [35]:

Для многообразия $\mathfrak{B}$ Ω-алгебр следующие утверждения равносильны:

I. Многообразие $\mathfrak{B}$ эквивалентно классу всех правых унитарных модулей над некоторым ассоциативным кольцом с единицей.

II. 1. В многообразии $\mathfrak{B}$ существует нульарная операция, которая отмечает единственную одноэлементную подалгебру в любой $\mathfrak{B}$-алгебре.

2. Многообразие $\mathfrak{B}$ правильное.

3. В любой $\mathfrak{B}$-алгебре каждая подалгебра является классом некоторой конгруэнции.

III. 1. То же самое, что в II.

2. Многообразие $\mathfrak{B}$ нормально.

3. В многообразии $\mathfrak{B}$ прямое и свободное произведение двух алгебр совпадают.

Аналогичные условия были получены для многообразия алгебр, эквивалентного классу всех правых унитарных полумодулей над ассоциативным полукольцом с единицей [35], классу всех правых унитарных модулей над коммутативным кольцом с единицей [36].

В работе [92] были найдены необходимые и достаточные условия, при которых произвольная категория коэкстенсивна категории всех правых унитарных модулей над некоторым ассоциативным кольцом с единицей. Нетрудно проверить, что категория, полученная из многообразия $\mathfrak{B}$, обладающего свойствами II или III, удовлетворяет этим условиям и поэтому сформулированная теорема из [35] вытекает из результатов работы [92].

4. Структура подмногообразий многообразия алгебр. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое многообразие Ω-алгебр. Легко видеть, что совокупность всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{B}$, т. е. многообразий, содержащихся в классе $\mathfrak{B}$, образует полную структуру относительно естественной упорядоченности с тривиальным многообразием в качестве нуля и многообразием $\mathfrak{B}$ в качестве единицы.

Атомы этой структуры (т. е. минимальные нетривиальные подмногообразия многообразия $\mathfrak{B}$) называются эквационально полными многообразиями.

В [97] введено понятие эквационально полного подкласса произвольного класса алгебр.

Известно, что структура подмногообразий многообразия $\mathfrak{B}$ дуально изоморфна структуре вполне характеристических конгруэнций на свободной $\mathfrak{B}$-алгебре со счетным множеством свободных образующих (см., например, [44]).

Большой интерес представляет изучение связей между свойствами данного многообразия и свойствами структуры его подмногообразий.

В настоящее время полностью описана структура подмногообразий класса всех алгебр с одной унарной операцией [76], причем атомами в этой структуре являются многообразие с тождеством $x' = y'$ и многообразие с тождеством $x' = x$ [80].

Эквационально полными многообразиями групп являются многообразия абелевых групп простой экспоненты. Нетрудно описать эквационально полные подмногообразия многообразия всех полугрупп, всех структур [80], ассоциативных колец [107]. Доказано, что в многообразии коммутативных группоидов существует континуум эквационально полных подмногообразий [79], тогда как в многообразии полугрупп их счетное число [80].

Многообразие абелевых Ω-групп эквационально полно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно многообразию всех правых унитарных модулей над некоторым простым кольцом с единицей [10].

Говорят, что $\mathfrak{B}$-алгебра G порождает подмногообразие $\mathfrak{B}(G)$ многообразия $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{B}(G)$ будет наименьшим подмногообразием, содержащим алгебру G. Возникает вопрос, при каких условиях $\mathfrak{B}$-алгебра порождает эквационально полное многообразие алгебр.

Алгебра G называется категоричной, если $\mathfrak{B}(G)$ состоит из подпрямых степеней алгебры G. Нетрудно видеть, что если G категорична, то многообразие $\mathfrak{B}(G)$ будет эквационально полным. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых конечная алгебра категорична [40]. В частности, как показано в [52], категоричной будет всякая строго функционально полная алгебра, т. е. такая Ω-алгебра G, для которой Ω конечно и любое отображение $G^n \to G$ является главной производной операцией, $n = 1, 2, \ldots$. Оказывается, что всякая строго функционально полная алгебра эквивалентна некоторой алгебре Поста [40]. Различным обобщениям понятий категоричности и строгой функциональной полноты алгебр посвящено много работ ([53, 54, 55] и библиография к ним).

§ 2. СВОБОДНЫЕ АЛГЕБРЫ И СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АЛГЕБР

1. **Определяющие соотношения.** Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс Ω-алгебр, X — некоторое множество, R — некоторое множество пар Ω-слов над алфавитом X. $\mathfrak{K}$-алгебра $F(X, R)$

называется алгеброй, определяемой в классе $\mathfrak{K}$ множеством X и системой соотношений R, если существует такое отображение $\alpha_0 : X \to F(X, R)$, называемое каноническим, что:

1) алгебра $F(X, R)$ порождается множеством $X\alpha_0$, $F(X, R) = \{X\alpha_0\}$;

2) в алгебре $F(X, R)$ выполняются соотношения R для образов элементов множества X, т. е. если $(w_1(x_1, \ldots, x_n), w_2(x_1, \ldots, x_n)) \in R$, то в алгебре $F(X, R)$ имеет место равенство

$$w_1(x_1\alpha_0, \ldots, x_n\alpha_0) = w_2(x_1\alpha_0, \ldots, x_n\alpha_0);$$

3) для любого отображения φ_0 множества X в произвольную алгебру G класса $\mathfrak{K}$, при котором в алгебре G выполняются соотношения R для образов элементов из X, существует такой гомоморфизм $\varphi : F(X, R) \to G$, что $\alpha_0\varphi = \varphi_0$.

В [28] это понятие обобщается для конкретных категорий. Частными случаями понятия алгебры, определяемой в данном классе некоторым множеством и некоторой системой соотношений, являются понятия свободной алгебры и свободного произведения алгебр данного класса. Мы получим определение свободной алгебры класса $\mathfrak{K}$ над множеством X, если в выше приведенном определении положим $R = \varnothing$, т. е. алгебра $F(X, \varnothing) = F(X)$ класса $\mathfrak{K}$ называется свободной алгеброй класса $\mathfrak{K}$ с множеством свободных образующих X, если существует такое отображение $\alpha_0 : X \to F(X)$, что $F(X) = \{X\alpha_0\}$ и для любого отображения $\varphi_0 : X \to G$, $G \in \mathfrak{K}$ найдется такой гомоморфизм $\varphi : F(X) \to G$, что $\alpha_0\varphi = \varphi_0$. Отметим, что в [65] для произвольного аксиоматизируемого класса алгебр введено другое понятие свободной алгебры.

Мощность множества X называется рангом свободной алгебры $F(X)$. В общем случае ранг не является инвариантом до свободных алгебр данного класса, что, например, показано в следующей теореме [105]:

Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое многообразие Ω-алгебр, $F(X_k)$ — свободная $\mathfrak{B}$-алгебра с k свободными образующими ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Тогда числа n, для которых $F(X_k) \simeq F(X_n)$, образуют арифметическую прогрессию. Наоборот, для любой арифметической прогрессии $\{k + qn, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ($k, q = 0, 1, 2, \ldots$) существует такое многообразие $\mathfrak{B}$, что эта прогрессия будет множеством рангов свободной $\mathfrak{B}$-алгебры $F(X_k)$ с k свободными образующими.

Однако, если многообразие $\mathfrak{B}$ содержит неодноэлементную конечную алгебру, то для любых двух изоморфных свободных $\mathfrak{B}$-алгебр $F(X)$ и $F(Y)$ множества X и Y равномощны ([57, 78], обобщение этого результата [81]).

Пусть теперь G_i, $i \in I$ — некоторый набор $\mathfrak{K}$-алгебр. Выберем в каждой алгебре G_i некоторое множество образующих X_i

и через R_i обозначим систему всех соотношений, выполняющихся в алгебре G_i относительно образующих R_i. Тогда алгебра $F\left(\bigcup\limits_{i\in I} X_i, \bigcup\limits_{i\in I} R_i\right) = \prod\limits_{i\in I} {}^*G_i$ называется свободным объединением алгебр G_i, $i\in I$, в классе $\mathfrak{K}$. Иными словами, $\mathfrak{K}$-алгебра $G = \prod\limits_{i\in I}^* G_i$ будет свободным объединением $\mathfrak{K}$-алгебр G_i, $i\in I$, тогда и только тогда, когда существует такой набор гомоморфизмов $\sigma_i : G_i \to G$, $i\in I$, что $G = \left\{\bigcup\limits_{i\in I} G_i\sigma_i\right\}$ и для любого набора гомоморфизмов $\varphi_i : G_i \to H$, $H\in\mathfrak{K}$, найдется такой гомоморфизм $\varphi : G \to H$, что $\sigma_i\varphi = \varphi_i$, $i\in I$.

Свободное объединение $G = \prod\limits_{i\in I}^* G_i$ алгебр G_i, $i\in I$, называется свободным произведением, если канонические гомоморфизмы $\sigma_i : G_i \to G$ являются мономорфизмами.

Аналогично можно определить свободное объединение алгебр с объединенной подалгеброй [27] и вообще свободное объединение амальгамы алгебр [12].

Легко привести примеры классов алгебр, в которых не существует алгебр, определяемых некоторыми множествами и некоторыми системами соотношений. Однако стандартным образом доказывается теорема (см., например, [27, 12]):

Если класс $\mathfrak{K}$ Ω-алгебр замкнут относительно подалгебр и прямых произведений, то существует $\mathfrak{K}$-алгебра $F(X, R)$, определяемая в классе $\mathfrak{K}$ любым множеством X и любой системой соотношений R, причем алгебра $F(X, R)$ определена однозначно с точностью до изоморфизма над образом в ней множества X.

Ясно, что каноническое отображение σ_0 множества X в алгебру $F(X, R)$ может и не быть взаимно однозначным. Например, σ_0 не будет взаимно однозначным, если соотношение $x_1 = x_2$, x_1, $x_2\in X$, является следствием соотношений R. Известны некоторые достаточные условия, при которых каноническое отображение взаимно однозначно [27, 12, 37]. Достаточные условия существования в классе $\mathfrak{K}$ свободного произведения алгебр рассматриваются в [95, 70].

2. Проблемы тождества слов, изоморфизма, вложимости. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс Ω-алгебр, $F(X, R)$ — $\mathfrak{K}$-алгебра, определяемая множеством X и системой соотношений R. Каждый элемент x алгебры $F(X, R)$ можно представить, вообще говоря неоднозначно, в виде $x = w(x_1\sigma_0, \ldots, x_n\sigma_0)$, где $w(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторое Ω-слово над X, $\sigma_0 : X \to F(X, R)$ — каноническое отображение. Задача нахождения алгоритма, позволяющего в случае конечных Ω, X, R в конечное число шагов ответить на вопрос, будут ли два Ω-слова w_1 и w_2 над X

определять один и тот же элемент алгебры $F(X, R)$, называется проблемой тождества слов и если такой алгоритм существует, то проблема тождества слов называется разрешимой. Проблема тождества слов решена для некоторых конкретных классов алгебр. В общем же случае доказано, что в многообразиях эта проблема равносильна проблеме вложимости, а именно, доказана теорема [47]: В многообразии $\mathfrak{B}$, определяемом конечным множеством тождеств, проблема тождества слов разрешима тогда и только тогда, когда существует алгоритм для определения, будет ли каноническое отображение множества X в $\mathfrak{B}$-алгебру $F(X, R)$, определяемую конечным множеством X и конечной системой соотношений R, определенного вида взаимно однозначным.

Проблема изоморфизма заключается в отыскании алгоритма для ответа на вопрос, изоморфны ли две алгебры, определяемые в данном классе конечным множеством образующих и соотношений. Эта проблема разрешима для некоторых конкретных классов алгебр, таких, как группоиды, лупы, некоторые классы квазигрупп [49], некоторые классы групп.

Все рассмотренные в [49] классы обладают тем свойством, что каждую частичную алгебру этого класса можно вложить в полную. Возникает вопрос, не вытекает ли из разрешимости проблемы вложимости разрешимость проблемы изоморфизма [49].

3. Шрайеровы многообразия. Интересен также вопрос о том, каким условиям должен удовлетворять класс $\mathfrak{K} \subseteq (\Omega)$, чтобы подалгебра свободной $\mathfrak{K}$-алгебры была свободной $\mathfrak{K}$-алгеброй. Класс $\mathfrak{K}$, обладающий этим свойством, называется шрайеровым. В настоящее время известен ряд шрайеровых многообразий алгебр. Например, для любой системы операций Ω-многообразие всех Ω-алгебр шрайерово [105]. Как показано в [94], шрайеровыми многообразиями в класс групп являются лишь многообразия всех групп, всех абелевых групп и абелевых групп простой экспоненты. Отметим недавно полученное новое доказательство шрайеровости многообразия всех групп с помощью теории алгебр со схемой операторов [71, 72], являющихся интересным классом частичных алгебр. Шрайеровыми многообразиями являются также класс всех неассоциативных линейных алгебр [20], классы коммутативных и антикоммутативных линейных алгебр [9], класс алгебр Ли [38]. В [2] доказано, что если многообразия $\mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2$, с операциями Ω_i, содержащими нульарную операцию 0, и тождествами Λ_i, содержащими тождества вида $0 \ldots 0\omega = 0$, $\omega \in \Omega_i$, шрайеровы, то многообразие $\mathfrak{B}$ с операциями $\Omega_1 \cup \Omega_2$ $(\Omega_1 \cap \Omega_2 = 0)$ и тождествами $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ также шрайерово. В частности, шрайеровыми многообразиями являются многообразия всех мультиоператорных групп [22], всех мультиоператорных линейных алгебр [21]. В работе [3] сделана попытка описать вид системы аксиом некоторых шрайеровых многообразий, частными случаями которых являются квазигруппы, лупы, n-квазигруппы. Во всех перечисленных в этом пункте многообразиях, за исключением многообразий абелевых групп и алгебр Ли, свободу подалгебр свободных алгебр можно вывести из теоремы, описывающей подалгебры свободного произведения алгебр данного многообразия (типа теоремы Куроша для групп). Из этой же теоремы обычно вытекает и теорема о существовании изоморфных продолжений для любых двух свободных разложений. Отметим, что теория свободных разложений, аналогичная многим из перечисленных теорий, построена для некоторых классов алгебр со схемой операторов (например, для сетей [41], для классов частичных алгебр со схемой операторов (для проективных плоскостей [19]), а также для некоторых категорий Ω-алгебр, в которых морфизмами являются не только гомоморфизмы (теория свободных T-сумм тел [34] и мультиоператорных тел [11]).

Легко проверить, что всякая свободная $\mathfrak{K}$-алгебра $F(X)$ проективна, т. е. для любого эпиморфизма $\varphi: G \to H$, G $H \in \mathfrak{K}$ и любого гомоморфизма $\beta: F(X) \to H$ существует такой гомоморфизм $\alpha: F(X) \to G$, что $\alpha\varphi = \beta$. Для некоторых классов алгебр, например для абелевых групп, групп, луп, квазигрупп, некоторых классов модулей, верно и обратное. Было бы интересно описать классы алгебр, в которых понятие свободной и проективной алгебр совпадают. Взаимосвязь между вопросами, затронутыми в этом и предыдущем пунктах, почти не изучена, хотя очень интересна.

4. Операции в классах алгебр. Свободное объединение алгебр является примером полуточной операции в классе алгебр. Говорят, что на классе алгебр $\mathfrak{K}$ задана полуточная операция, если каждому набору $\mathfrak{K}$-алгебр G_α, $\alpha \in I$, однозначно сопоставлена такая $\mathfrak{K}$-алгебра $G = \prod\limits_{\alpha \in I}^{\circ} G_\alpha$, что $G = \{G_\alpha\varphi_\alpha,\ \alpha \in I\}$ для некоторого набора канонических гомоморфизмов $\varphi_\alpha : G_\alpha \to G$. Примерами полуточных операций в произвольном многообразии $\mathfrak{B}$ Ω-алгебр с нулем являются также поливербальные произведения Головина, которые определяются следующим образом. Пусть V — некоторая совокупность пар Ω-слов вида $(v(x_{11}, \ldots, x_{1s_1}, \ldots; x_{n1}, \ldots, x_{ns_n}),\ v'(x_{11}, \ldots, x_{1s_1}; \ldots; x_{n1}, \ldots, x_{ns_n}))$, где $x_{ij} \neq x_{kl}$ при $i \neq k$. Тогда V-произведением $\prod\limits_{\alpha \in I}^{V} G_\alpha$, алгебр G_α, $\alpha \in I$, называется фактор алгебра $\prod\limits_{\alpha \in I}^{*} G_\alpha / \nu$ их свободного произведения по конгруэнции ν, порожденной всевозможными парами $(v(g_{11}, \ldots, g_{1s_1}; \ldots; g_{n1}, \ldots, g_{ns_n}), \ v'(g_{11}, \ldots, g_{1s_1}; \ldots; g_{n1}, \ldots, g_{ns_n}))$, где $(v, v')\in V$, $g_{ij}\in G_{\alpha_i}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, или $g_{ij}=0$. V-произведения удовлетворяют постулату Маклейна (т. е. $\prod\limits_{\alpha\in I}^{V} F(X_\alpha, R_\alpha\cup S_\alpha) = \prod\limits_{\alpha\in I}^{V} F(X_\alpha, R_\alpha)/\sigma)$, где σ— конгруэнция, порожденная $\bigcup\limits_{\alpha\in I} S_\alpha$, постулату склеиваемости эндоморфизмов (т. е. для любого набора эндоморфизмов $\psi_\alpha : G_\alpha \to G_\alpha$, $\alpha\in I$, существует такой эндоморфизм $\psi : \prod\limits_{\alpha\in I}^{V} G_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in I}^{V} G_\alpha$, что $\varphi_\alpha\psi = \psi_\alpha\varphi_\alpha$, $\alpha\in I$, для канонических гомоморфизмов $\varphi_\alpha : G_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in I}^{V} G_\alpha$) и постулату о нулевых сомножителях (т. е. если $G_\alpha = 0$, $\alpha\in J\setminus I$, то $\prod\limits_{\alpha\in I}^{V} G_\alpha = \prod\limits_{\alpha\in I\setminus J}^{V} G_\alpha$). Доказано [1], что верно и обратное. В многообразии $\mathfrak{B}$ Ω-алгебр с нулем операция $\circ$ тогда и только тогда является V-операцией, когда она полуточна, удовлетворяет постулатам Маклейна, постулату склеиваемости эндоморфизмов и постулату о нулевых сомножителях. Эта теорема является перенесением на алгебры теоремы О. Н. Головина для групп. Вообще, теория операций на класс групп развита очень глубоко и, по-видимому, может быть так же глубоко развита в произвольном многообразии универсальных алгебр.

§ 3. РЯДЫ ПОДАЛГЕБР И ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АЛГЕБР

1. Теоремы Шрайера и Жордана — Гельдера. Следуя [67], будем говорить, что в Ω-алгебре G задан нормальный ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n = E$$

от G до E, если G_i — подалгебра алгебры G, на которой существует такая конгруэнция ρ_i, что $E\rho_i = G_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда говорят, что ряд $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n$ субконгруэнций (т. е. конгруэнции на подалгебрах алгебры G) соответствует данному нормальному ряду от G до E. Обычным образом определяется композиционный ряд, изоморфные ряды, уплотнение нормального ряда. Имеет место аналог теоремы Шрайера для групп [67]:

Пусть

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n = E, \tag{1}$$

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = E, \tag{2}$$

два нормальных ряда от G до E. Если существуют такие ряды субконгруэнций алгебры G $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n$ и $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$, соответствующие рядам (1) и (2), что $E\rho_i\pi_j = E\pi_j\rho_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, то ряды (1) и (2) обладают изоморфными уплотнениями.

Эта теорема при несколько ином определении нормального ряда была доказана Голди [63]. Доказательство, приведенное в [67] позволяет перенести результат на категории, удовлетворяющие определенным условиям (в частности, на алгебры с многозначными операциями и алгебры с бесконечноместными операциями). При других ограничениях теорема Шрайера для алгебр доказана в [62, 58, 85, 74], для объектов категории — в [73].

Обычным образом из теоремы Шрайера при тех же условиях на алгебру вытекает теорема Жордана — Гёльдера. В работе [64] найдены необходимые и достаточные условия, при которых теорема Жордана — Гёльдера имеет место в алгебре с условием минимальности и максимальности для подалгебр.

2. Изоморфные продолжения прямых разложений. Легко видеть, что если алгебра $G = \prod_{i \in I} G_i$ представлена в виде прямого произведения алгебр G_i, $i \in I$, то существуют такие конгруэнции π_i, $i \in I$, алгебры G, что $G_i \cong G/\pi_i$. Были найдены условия ([4, 69], для моделей [84]), при которых данная система конгруэнций π_i, $i \in I$, алгебры G определяет прямое разложение $G = \prod_{i \in I} G/\pi_i$.

Аналогичные условия для прямых произведений алгебр с отмеченными подалгебрами были найдены в [15]. Для алгебр с одноэлементной подалгеброй можно определить прямые разложения с помощью эндоморфизмов [39].

Конгруэнция π называется конгруэнцией-сомножителем алгебры G, если существует такая конгруэнция π', что $G = G/\pi \times G/\pi'$. Разложение алгебры G вида $G = \prod_{i \in I} G/\pi_i$ называется стандартным. Обычным образом определяется продолжение прямого разложения и изоморфизм прямых разложений.

Говорят, что два стандартных прямых разложения алгебры G

$$G = \prod_{i \in I} G/\pi_i', \quad G = \prod_{j \in J} G/\pi_j''$$

обладают строго изоморфными продолжениями [43], если существуют такие конгруэнции π_{ij}, $i \in I$, $j \in J$, алгебры G, что

$$G/\pi'_i = \prod_{j\in J} G/\pi_{ij}, \quad G/\pi''_j = \prod_{i\in I} G/\pi_{ij}.$$

Очевидно, что если два прямых разложения алгебры обладают строго изоморфными продолжениями, то они обладают изоморфными продолжениями в обычном смысле. Доказано [43], что любые два прямых разложения алгебры обладают строго изоморфными продолжениями тогда и только тогда, когда множество всех конгруэнций—сомножителей алгебры G образует булеву алгебру относительно умножения и пересечения конгруэнций. В частности, в силу результатов работы [96] строго изоморфными продолжениями обладают любые два прямых разложения любой алгебры многообразия, в котором выполняются тождества $xyy\omega = yyx\omega = x$, $xxy\omega' = xyx\omega' = yxx\omega' = x$ для некоторых тернарных главных производных операций ω, ω'.

Если предположить существование в алгебре G одноэлементной подалгебры 0, то можно получить более общие достаточные условия существования изоморфных продолжений. А именно [43]: Пусть в алгебре G существует одноэлементная подалгебра 0. Пусть, кроме того, для любых конгруэнций сомножителей π_1, π_2 алгебры G $0\pi_1\pi_2 = 0\pi_2\pi_1$ и для любых конгруэнций сомножителей π, π', ρ, для которых $G = G/\pi \times G/\pi'$, выполняется равенство

$$0(\pi\rho \cap \pi'\rho) = 0\rho.$$

Тогда любые два разложения алгебры G обладают изоморфными продолжениями. Последние два результата получены для произвольных моделей.

Теория прямых разложений алгебр может быть развита гораздо дальше, если предполагать, что множество операций Ω содержит нульарную операцию 0 и бинарную операцию $+$, связанные тождествами

$$x + 0 = 0 + x = x,$$

$$0\ldots0\omega = 0, \quad \omega \in \Omega,$$

и рассматривать дискретные прямые произведения. Тогда естественно определяются центр алгебры и центральный изоморфизм прямых разложений.

Подалгебра C алгебры G называется центральной, если:

1) для любого $c \in C$ существует такой $\bar{c} \in C$, что $c + \bar{c} = 0$;

2) для любых $c \in C$ и $x, y \in G$

$$x + (y + C) = (x + c) + y = (x + y) + c;$$

3) для любых $c \in C$, $\omega \in \Omega$, $n = n(\omega)$, $x_1, \ldots, x_n \in G$,

$$x_1 \ldots (x_k + c) \ldots x_n \omega = x_1 \ldots x_k \ldots x_n \omega + \underbrace{0 \ldots 0}_{k-1} c 0 \ldots 0 \omega.$$

Легко видеть, что множество всех центральных подалгебр алгебры G образует полную подструктуру структуры всех подалгебр алгебры G. В частности, объединение всех центральных подалгебр будет центральной подалгеброй, которая называется центром алгебры G и обозначается $Z(G)$. Например, если G — группа с операторами, то $Z(G)$ будет допустимым центром группы G, если G — кольцо, то $Z(G)$ — его аннулятор. Две подалгебры H_1 и H_2 алгебры G называются централько изоморфными, если между ними существует такой изоморфизм $\varphi: H_1 \to H_2$, что для любого элемента $x \in H_1$ найдется $z \in Z(G)$, для которого $\varphi(x) = x + z$. Два прямых разложения алгебры G называются центрально изоморфными, если между множителями существует такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие множители центрально изоморфны.

Подалгебра H алгебры G называется субтрактивной, если для любых $x \in G$, $y \in H$ из того, что $x + y \in H$ или $y + x \in H$, вытекает $x \in H$. Алгебра G локально удовлетворяет условию максимальности, если всякая ее субтрактивная конечно-порожденная подалгебра удовлетворяет условию максимальности.

Доказана теорема [46]: Если алгебра G обладает таким прямым разложением $G = \prod_{i \in I} G_i$, что центр каждого сомножителя $Z(G_i)$, $i \in I$, удовлетворяет условию минимальности и локально условию максимальности для субтрактивных подалгебр, то любые два прямых разложения алгебры G обладают центрально изоморфными продолжениями.

Интересно отметить, что в случае групп с операторами этот результат объединяет известные результаты Бэра и Кроули о существовании изоморфных продолжений любых двух прямых разложений для группы с операторами, допустимый центр которой удовлетворяет условию минимальности и локально условию максимальности, и группы имеющей прямое разложение, сомножители которого обладают главными рядами.

Другие результаты об изоморфных продолжениях дискретных прямых разложений алгебр см. [45] и библиографию к [45].

Отметим, что теория прямых разложений параллельно развивается на языке структур, на языке категорий [24] и на языке полугрупп [25].

§ 4. СООТВЕТСТВИЯ В АЛГЕБРАХ

1. Структура соответствий Ω-алгебры. Пусть G и G' — две Ω-алгебры. Подалгебра ρ алгебры $G\times G'$ называется соответствием алгебры G с алгеброй G'. Множество $\mathfrak{P}(G, G')$ всех соответствий алгебры G с G' образует полную компактно порожденную структуру [42] относительно естественной теоретико-множественной упорядоченности.

Соответствие $\rho^*\in\mathfrak{P}(G', G)$ называется противоположным соответствию $\rho\in\mathfrak{P}(G, G')$, если $a'\rho^*a$ тогда и только тогда, когда $a\rho a'$, $a\in G$, $a'\in G'$.

Отсюда $(\rho^*)^*=\rho$ и отображение $\rho\to\rho^*$ является изоморфизмом структур $\mathfrak{P}(G, G')$ и $\mathfrak{P}(G', G)$.

Если $\rho\in\mathfrak{P}(G, G')$, $\sigma\in\mathfrak{P}(G', G'')$, то соответствие $\rho\sigma\in\mathfrak{P}(G, G'')$ называется произведением соответствий ρ и σ, если для любых $a\in G$, $a''\in G''$ $a(\rho\sigma)a''$ тогда и только тогда, когда существует такой $a\in G'$, что $a\rho a'\sigma a''$.

Если произведение соответствий определено, то оно ассоциативно, соответствие $\varepsilon_G=\{(a, a)\mid a\in G\}$ играет роль левой единицы, а $\varepsilon_{G'}=\{(a', a')\mid a'\in G'\}$ — роль правой единицы, т. е. $\varepsilon_G\rho=\rho\varepsilon_G=\rho$ для $\rho\in\mathfrak{P}(G, G')$. Кроме того, если $\rho\leqslant\sigma$, $\sigma\in\mathfrak{P}(G, G')$, то для любого $\tau\in\mathfrak{P}(G', G'')$ $\rho\tau\leqslant\sigma\tau$ и $(\rho\tau)^*=\tau^*\rho^*$.

Пусть теперь $G=G'$. Множество $\mathfrak{P}(G)=\mathfrak{P}(G, G)$ будет полной компактно порожденной структурой относительно теоретико-множественной упорядоченности, полугруппой с единицей $\varepsilon=\varepsilon_G$ относительно умножения соответствий, а отображение $\rho\to\rho^*$ — автоморфизмом структуры $\mathfrak{P}(G)$ и инвалюцией полугруппы $\mathfrak{P}(G)$. Наоборот, для всякой компактно порожденной структуры P и всякого ее автоморфизма α, квадрат которого равен тождественному, существует такая алгебра G, что структура P изоморфна структуре всех соответствий $\mathfrak{P}(G)$ алгебры G, а автоморфизм α реализуется переходом к противоположному соответствию [13].

Подалгебры алгебры G и конгруэнции алгебры G образуют соответственно компактно порожденные подструктуры $\mathfrak{S}(G)$ и $\mathfrak{L}(G)$ структуры соответствий $\mathfrak{P}(G)$, а именно

$$\mathfrak{S}(G)=\{\rho\in\mathfrak{P}(G)\mid\rho\leqslant\varepsilon\},$$

$$\mathfrak{L}(G)=\{\rho\in\mathfrak{P}(G)\mid\rho\geqslant\varepsilon, \rho^*=\rho, \rho^2=\varepsilon\}.$$

Доказано, что верно и обратное: Всякая компактно порожденная структура изоморфна структуре подалгебр некоторой универсальной алгебры ([42], вытекает также из [13]). Всякая компактно порожденная структура изоморфна структуре конгруэнций некоторой универсальной алгебры [68].

В [14] найдены необходимые и достаточные условия, при которых для компактно порожденных структур S_1, S_2, P существует такая пара частичных алгебр G_1, G_2, что S_i изоморфна структуре подалгебр $\mathfrak{S}(G_i)$ частичной алгебры G_i, $i=1,2$, а P — структуре соответствий $\mathfrak{P}(G_1, G_2)$ частичной алгебры G_1 с частичной алгеброй G_2.

В работе [66] охарактеризованы структура подалгебр алгебры с бесконечноместными операциями и показано, что всякая структура изоморфна структуре всех конгруэнций некоторой алгебры с бесконечноместными операциями. В работе [93] изучается структура конгруэнций псевдопростой алгебры (т. е. алгебры, которая изоморфна всякой своей факторалгебре по любой конгруэнции).

2. Полугруппа соответствий Ω-алгебры. Вопрос об условиях, при которых данная полугруппа изоморфна полугруппе всех соответствий некоторой алгебры, остается открытым.

Пусть $\mathfrak{S}(G)$ — совокупность всех подалгебр алгебры G. Так как для подалгебр $\rho, \sigma \in \mathfrak{S}(G)$ $\rho\sigma = \sigma\rho$, то $\mathfrak{S}(G)$, очевидно, является подполугруппой полугруппы $\mathfrak{P}(G)$. Множество конгруэнций $\mathfrak{L}(G)$ будет подполугруппой в том и только в том случае, если на алгебре G конгруэнции перестановочны, т. е. $\rho\sigma = \sigma\rho$ для любых $\rho, \sigma \in \mathfrak{L}(G)$ (в этом случае структура $\mathfrak{L}(G)$ модулярна). В частности, $\mathfrak{L}(G)$ будет полугруппой, если на алгебре G существует такая тернарная производная операция ω, что $xyy\omega = yyx\omega = x$ для любых $x, y \in G$. Если же на алгебре G существует такая производная тернарная операция ω', что $xxy\omega' = xyx\omega' = yxx\omega' = x$ для любых $x, y \in G$, то структура $\mathfrak{L}(G)$ дистрибутивна. Для многообразий верно и обратное утверждение; если многообразие $\mathfrak{P}$ нормально, то существует такая тернарная главная производная операция ω, что тождества $xyy\omega = yyx\omega = x$ являются тождествами многообразия $\mathfrak{B}$ [26]; если, кроме того, структура конгруэнций любой $\mathfrak{B}$-алгебры дистрибутивна, то существует еще такая тернарная производная операция ω', что тождества $xxy\omega' = xyx\omega' = yxx\omega' = x$ являются тождествами многообразия $\mathfrak{P}$ [96].

Множество эндоморфизмов $\mathfrak{E}(G)$ алгебры G образует подполугруппу в полугруппе всех соответствий алгебры G, а именно

$$\mathfrak{E}(G) = \{\rho \in \mathfrak{P}(G) \mid \rho\rho^* \geqslant \varepsilon,\ \rho^*\rho \leqslant \varepsilon\}.$$

Наоборот: всякая полугруппа с единицей изоморфна полугруппе всех эндоморфизмов некоторой универсальной алгебры. В [89] найдены необходимые и достаточные условия, при которых данная полугруппа E с единицей с выделенными подполугруппами E_1 и E_2 реализуется как полугруппа всех эндоморфизмов некоторой алгебры так, что E_1 оказывается подполугруппой всей моноэндоморфизмов, а E_2 — подполугруппа всех эндоэпиморфизмов.

В [7, 8] изучается строение полугрупп эндоморфизмов свободных алгебр.

В работах [98, 99] доказано, что для любой компактно порожденной структуры L и произвольной группы A существуют такие алгебры G и H, что структура L изоморфна структуре всех подалгебр алгебры G и структуре всех конгруэнций алгебры H, а группа A — группам всех автоморфизмов алгебры G и алгебры H.

3. Ω-алгебра соответствий Ω-алгебры. Пусть G — алгебра с системой операций Ω. Для любой операции $\omega \in \Omega$, $n(\omega) = n > 0$ и любых соответствий $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \mathfrak{P}(G)$ определим подмножество $\rho_1 \ldots \rho_n \omega$ алгебры $G \times G$ следующим образом:

$$\rho_1 \ldots \rho_n \omega = \{(x_1 \ldots x_n \omega, y_1 \ldots y_n \omega) \mid x_i \rho_i y_i, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Если для любой операции $\omega' \in \Omega$, $n(\omega') = m > 0$, на алгебре G существуют такие главные производные операции $\omega_1, \ldots, \omega_n$, $n(\omega_i) = m$, что

$$\begin{aligned} & x_{11} \ldots x_{1n} \omega \ldots x_{m1} \ldots x_{mn} \omega \omega' = \\ & = x_{11} \ldots x_{m1} \omega_1 \ldots x_{1n} \ldots x_{mn} \omega_m \omega \end{aligned} \qquad (1)$$

для любых $x_{ij} \in G$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, и, если алгебра G обладает одноэлементной подалгеброй при наличии нульарных операций $\omega \in \Omega$, то $\rho_1 \ldots \rho_n \omega$ будет соответствием алгебры G. Причем $(\rho_1 \ldots \rho_n \omega)^* = \rho_1^* \ldots \rho_n^* \omega$ и если $\rho_i \leqslant \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$, то $\rho_1 \ldots \rho_n \omega \leqslant \tau_1 \ldots \tau_n \omega$. Таким образом, множество соответствий $\mathfrak{P}(G)$ алгебры G, удовлетворяющей для любых операций ω, $\omega' \in \Omega$ условию (1), превращается в упорядоченную Ω-алгебру, на которой выполняются тождества (1), причем отображение $\rho \to \rho^*$ будет ее Ω-автоморфизмом, а множество подалгебр алгебры G — Ω-подалгеброй алгебры $\mathfrak{P}(G)$.

Для многообразий верно и обратное утверждение. Если многообразие $\mathfrak{B}$ Ω-алгебр таково, что для любой операции $\omega \in \Omega$, $n(\omega) = n$ и для любых подалгебр $\rho_1, \ldots, \rho_n$ любой $\mathfrak{B}$-алгебры G $\rho_1 \ldots \rho_n \omega$ снова будет подалгеброй, то для любой операции $\omega' \in \Omega$, $n(\omega) = m$, в многообразии $\mathfrak{B}$ существуют такие главные производные операции $\omega_1, \ldots, \omega_m$, $n(\omega_i) = m$, что (1) является тождеством многообразия $\mathfrak{B}$ (доказывается тем же методом, что и анологичное утверждение для группоидов в работе [48]).

В частности, тождеством (1) удовлетворяют абелевы Ω-алгебры. Ω-алгебра G называется абелевой, если для любых ω, ω', $n(\omega)=n>0$, $n(\omega')=m>0$ и любых $x_{ij}\in G$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$,

$$x_{11}\ldots x_{1n}\omega\ldots x_{m1}\ldots x_{mn}\omega\omega'=x_{11}\ldots x_{m1}\omega'\ldots x_{1n}\ldots\ldots x_{mn}\omega'\omega \quad (2)$$

и если алгебра G содержит одноэлементную подалгебру в случае, когда в Ω есть нульарные операции.

Для абелевой Ω-алгебры G множество соответствий $\mathfrak{P}(G)$ можно превратить в Ω-алгебру другим способом. А именно, определим

$$\rho_1\ldots\rho_n\omega=\{(x, y_1\ldots y_n\omega)\,|\,(x, y_i)\in\rho_i,\ i=1, \ldots, n\}.$$

При таком определении операций множество $\mathfrak{P}(G)$ превращается в упорядоченную Ω-алгебру, причем алгебра $\mathfrak{P}(G)$ будет абелевой алгеброй, а множество эндоморфизмов $\mathfrak{E}(G)$— ее подалгеброй. Для многообразия $\mathfrak{B}$ справедливо и обратное утверждение: Если в многообразии $\mathfrak{B}$ для любой операции $\omega\in\Omega$, $n(\omega)=n$ и любых эндоморфизмов $\rho_1, \ldots, \rho_n$ произвольной $\mathfrak{B}$-алгебры $\rho_1\ldots\rho_n\omega$ является эндоморфизмом, то многообразие $\mathfrak{B}$ абелево, т. е. в каждой $\mathfrak{B}$-алгебре выполняются тождества (2) [50].

4. Нормальные подалгебры и внутренние автоморфизмы алгебр. В ряде работ изучаются многообразия, в алгебрах которых конгруэнции обладают свойствами, аналогичными свойствам нормальных делителей в группах.

В работе [102] получены необходимые и достаточные условия, при которых в многообразии $\mathfrak{B}$ существует бинарная производная операция ω, определяющая вид конгруэнции на каждой $\mathfrak{B}$-алгебре, т. е. каждая конгруэнция π произвольной $\mathfrak{B}$-алгебры G обладает таким классом N_π, что $(g_1, g_2)\in\pi$ тогда и только тогда, когда $g_1g_2\omega\in N_\pi$. В частности, если в многообразии $\mathfrak{B}$ выполняются тождества $xx\omega_1=yy\omega_1$, $x=xy\omega_1y\omega_2$ для некоторых бинарных главных производных операций ω_1, ω_2, то операция ω_1 определяет вид конгруэнций на каждой $\mathfrak{B}$-алгебре.

Подалгебра H алгебры G называется нормальной, если она является классом некоторой конгруэнции алгебры G. Доказано [88], что подалгебра H нормальна в G тогда и только тогда, когда для каждой главной производной операции ω алгебры G, $n(\omega)=n$, и любых $g_1, \ldots, g_k\in G$, $h_1, \ldots, h_l, h_1', \ldots$ $\ldots, h_l'\in H$, $k+l=n$, из того, что $g_1\ldots g_kh_1\ldots h_l\omega\in H$, вытекает $g_1\ldots g_kh_1'\ldots h_l'\omega\in H$.

Пусть $\mathfrak{B}$—многообразие Ω-алгебр. Автоморфизм α алгебры G называется внутренним [46], если в многообразии $\mathfrak{B}$ существует такая n-арная производная операция, что для некоторых $g_2, \ldots, g_n \in G$ в алгебре G выполняются равенство $g\alpha = gg_2 \ldots \ldots g_n\omega$, $g \in G$, и для каждой $\mathfrak{B}$-алгебры G' отображение $x' \to xx_2 \ldots x_n\omega$, $x \in G'$, является автоморфизмом алгебры G' при любом выборе элементов $x_2, \ldots, x_n \in G'$. Оказывается, что в многообразии групп это понятие совпадает с обычным. Показано [46], что в любом многообразии $\mathfrak{B}$ множество всех внутренних автоморфизмов произвольной $\mathfrak{B}$-алгебры G является нормальным делителем в группе всех автоморфизмов и если среди классов некоторой конгруэнции алгебры G существует единственная подалгебра, то она инвариантна относительно внутренних автоморфизмов алгебры G.

§ 5. ОТНОШЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ НА АЛГЕБРАХ

Следуя [44], будем говорить, что на множестве G определено абстрактное отношение зависимости, если задана такая система $\mathfrak{D}$ подмножеств множества G, называемых независимыми подмножествами, что $X \in \mathfrak{D}$ тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество множества X принадлежит $\mathfrak{D}$. Подмножества множества G, не принадлежащие $\mathfrak{D}$, называются зависимыми. Элемент $g \in G$ зависит от подмножества $X \subseteq G$, если либо $g \in X$, либо существует такое $X' \subseteq X$, что $X' \in \mathfrak{D}$ и $X' \cup g \notin \mathfrak{D}$. Обозначим через $\overline{X}$ совокупность всех элементов, зависящих от множества X. Если $X \in \mathfrak{D}$ и $\overline{X} = G$, то X называется базисом. Можно доказать (см., например, [44]), что если отношение зависимости $\mathfrak{D}$ обладает свойством замещения, т. е. из $y \notin \overline{X}$ и $y \in \overline{X \cup z}$, следует $z \in \overline{X \cup y}$ для любых $x, y \in G$, то в G существует базис и любые два базиса равномощны.

Пусть теперь G—Ω-алгебра. На Ω-алгебре G можно различными способами вводить отношения зависимости, так или иначе связанные с операциями Ω. Например, назовем множество X C-независимым [4], если ни один элемент $y \in X$ не принадлежит подалгебре $\{X \setminus y\}$, порожденной в алгебре G подмножеством $X \setminus y$. Ясно, что тогда $\overline{X} = \{X\}$ для любого множества $X \subseteq G$. Вопрос о том, для каких Ω-алгебр введенное отношение зависимости обладает свойством замещения, остается открытым. Рассмотрим теперь отношение зависимости, введенное Марчевским [90], а именно будем называть подмножество X Ω-алгебры G M-независимым, если подалгебра $\{X\}$ является свободной алгеброй с множеством свободных образующих X в многообразии $\mathfrak{B}(G)$, порожденном алгеброй G в классе всех Ω-алгебр. За последние годы появилось очень много работ, посвященных изучению этого понятия M-независимости (см., например, [109, 91, 106]. для алгебр с бесконечноместными операциями [100, 101]). Мы остановимся лишь на одном направлении этих исслодований (см. обзорную статью [110] и библиографию к ней). Ω-алгебра G называется $\overset{*}{v}_*$-алгеброй, если всякое ее C-независимое подмножество является $\mathfrak{M}$-независимым. Можно показать, что если $\overset{*}{v}_*$-алгебра обладает базисом, то любые два базиса равномощны. $\overset{*}{v}_*$-алгебра G называется v^*-алгеброй, если отношение зависимости на G обладает свойством замещения. Получено полное описание v^*-алгебр:

Ω-алгебра G тогда и только тогда является v^*-алгеброй, когда она обладает одним из следующих свойств:

1. Все производные алгебраические операции на G являются константами.

2. На G существует такая производная алгебраическая бинарная операция, относительно которой G является полугруппой с единицей, причем для каждого необратимого элемента $x \in G$ и для любого $y \in G$ выполняется равенство $x \cdot y = x$ и каждая производная алгебраическая операция ω на G удовлетворяет тождеству $x_1 \ldots x_n \omega \cdot y = (x_1 y) \ldots (x_n \cdot y) \omega$.

3. На G существуют такие две бинарные производные алгебраические операции $\cdot$ и $-$, относительно которых G является квазиполем, причем любая производная алгебраическая операция ω на G удовлетворяет тождеству

$$(x - y \cdot x_1) \ldots (x - y x_n) \omega = x - y \cdot (x_1 \ldots x_n \omega).$$

4. Алгебра G четырехэлементна и на G существуют такая унарная производная алгебраическая операция ω_1 и такая тернарная производная алгебраическая операция ω_2, что $xyx\omega_1\omega_2 = y$, $xyx\omega_2 = x$.

5. На множестве G существуют такая группа подстановок H и такое подмножество $G_0 \subseteq G$, содержащее все неподвижные точки нетождественных подстановок из H и инвариантное относительно H, что все производные алгебраические операции на G определяются равенствами: $x_1 \ldots x_n \omega = x_j h$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $x_1, \ldots, x_n \omega = x_0$, где $h \in H$, $x_0 \in G_0$.

6. Существует такое поле P, что G является линейным пространством над P, причем любая n-арная производная алгебраическая операция ω на G определяется равенством $x_1 \ldots x_n \omega = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + x_0$, где $\lambda_k \in P$, а x_0 принадлежит некоторому линейному подпространству $G_0 \subseteq G$.

v^*-алгебры, удовлетворяющие условию 5, в котором предполагается дополнительно, что каждая подстановка из H обладает не больше чем одной неподвижной точкой, или условию 6, называются v-алгебрами. По-другому, v — алгебры можно охарактеризовать как такие Ω-алгебры, в которых всякое равенство вида $x_1 \ldots x_n\omega_1 = x_1 \ldots x_n\omega_2$, не тождественное относительно x_n, эквивалентно равенству $x_n \cdot x_1 \ldots x_{n-1}\omega$ (здесь ω_1, ω_2 — n-арные, ω — $(n-1)$-арная производные алгебраические операции данной алгебры). Иным, чем v^*-алгебры, обобщением v-алгебр является понятие v_*-алгебры: Ω-алгебра G называется v_*-алгеброй, если всякое равенство вида $x_1 \ldots x_n\omega_1 = x_1 \ldots \ldots x_n\omega_2$, не тождественное относительно одного из x_j, эквивалентно равенству вида $x_i = x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_n\omega$, где $\omega_1, \omega_2, \omega$ — такие же, как выше, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$. Нетрудно видеть, что всякая v_*-алгебра является v_*^*-алгеброй. Получено описание v_*-алгебр, из которого вытекает, в частности, что классы v^*-алгебр и v_*-алгебр различны. Вопрос об описании произвольных v_*^*-алгебр остается открытым.

С помощью отношения зависимости, определенного в алгебрах некоторого класса $\mathfrak{K}$, можно ввести понятие алгебраически замкнутого алгебраического расширения. При некоторых условиях на класс $\mathfrak{K}$ и отношение зависимости удается доказать теорему о существовании и единственности алгебраического замкнутого алгебраического расширения для любой $\mathfrak{K}$-алгебры [44, 77], из которой вытекает, например, классическая теорема для полей.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Баранович Т. М.,** О политождествах в универсальных алгебрах. Сибирск. матем. ж., 1964, 5, № 5, 976—986 (РЖМат, 1965, 7А244)
2. —, Свободные разложения в пересечении примитивных классов алгебр. Матем. сб., 1965, 67, № 1, 135—153 (РЖМат, 1965, 10А291)
3. —, Свободные разложения в некоторых примитивных классах универсальных алгебр. Сибирск. матем. ж., 1966, 7, № 6, 1230—1249 (РЖМат, 1967, 11А264)
4. **Биркгоф Г.,** Теория структур. ИЛ, 1951
5. **Бурмистрович И. Е.,** Алгебры с переменными операциями. VII Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре. Резюме сообщений и докладов. Кишинев, 1965
6. **Валуцэ И. И.,** Универсальные алгебры с правильными, но не перестановочными конгруэнциями. Успехи матем. наук, 1963, 18, № 3, 145—148 (РЖМат, 1964, 3А243)
7. —, Левые идеалы полугруппы эндоморфизмов свободной универсальной алгебры. Матем. сб., 1963, 62, № 3, 371—384 (РЖМат, 1964, 7А297)
8. —, Об эндоморфизмах одного класса универсальных алгебр. В сб. «Материалы докл. 1-й Научно-технической конференции Кишиневск. политехн. ин-та». Кишинев, 1965, 90—91 (РЖМат, 1965, 12А337)
9. **Гайнов А. Т.,** Коммутативные свободные и антикоммутативные свобод-

ные произведения алгебр. Докл. АН СССР, 1960, **133**, № 6, 1275—1278 (РЖМат, 1961, 6А294)
10. **Гечег Ф.**, О некоторых классах полумодулей и модулей. Acta scient. math., 1963, **24**, № 1-2, 165—172 (РЖМат, 1964, 7А308)
11. **Иванов И. С.**, Свободные T-суммы мультиоператорных дел. Докл. АН СССР, 1965, **165**, № 1, 28—30 (РЖМат, 1966, 4А212)
12. **Искандер А. А.**, Универсальные алгебры с соотношениями и амальгамы. Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1965, № 4, 22—28 (РЖМат, 1966, 6А247)
13. —, Структура соответствий универсальной алгебры. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, **29**, № 6, 1357—1372 (РЖМат, 1966, 5А279)
14. —, Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий. Матем. сб., 1966, **70**, № 3, 438—456 (РЖМат, 1967, 10А222)
15. **Каролинская Л. Н.**, Прямые разложения абстрактных алгебр с отмеченными подалгебрами. Изв. высш. учебн. заведений, Матем., 1960, № 4, 106—113 (РЖМат, 1962, 6А242)
16. **Когаловский С. Р.**, Об универсальных классах алгебр, замкнутых относительно прямых произведений. Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 241—242 (РЖМат, 1961, 1А274)
17. —, К теореме Биркгофа. Успехи матем. наук, 1965, **20**, № 5, 206—207 (РЖМат, 1966, 3А258)
18. —, Обобщенно квазиуниверсальные классы моделей. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, **29**, № 6, 1273—1282 (РЖМат, 1966, 5А283)
19. **Копейкина Л. И.**, Свободные разложения проективных плоскостей. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, **9**, № 6, 495—526
20. **Курош А. Г.**, Неассоциативные свободные суммы алгебр. Матем. сб., 1955, **37**, № 2, 251—264 (РЖМат, 1956, 3706)
21. —, Свободные суммы мультиоператорных алгебр. Сибирск. матем. ж., 1960, 1, № 1, 62—70 (РЖМат, 1961, 4А216), Исправление, Сибирск. матем. ж., 1960, **1**, № 4, 638 (РЖМат, 1961, 4А217)
22. —, Свободные суммы мультиоператорных групп. Acta scient. math., 1960, **21**, № 3-4, 187—196 (РЖМат, 1961, 4А218)
23. —, Лекции по общей алгебре. Физматгиз, Москва, 1962
24. **Лившиц А. Х.**, Прямые разложения в алгебраических категориях. Тр. Моск. матем. о-ва, 1960, **9**, 129—141 (РЖМат, 1961, 12А335)
25. —, Прямые разложения идемпотентов в полугруппах. Докл. АН СССР, 1960, **134**, № 2, 271—274 (РЖМат, 1962, 2А233)
26. **Мальцев А. И.**, К общей теории алгебраических систем. Матем. сб., 1954, **35**, № 1, 3—20 (РЖМат, 1957, 209)
27. —, Свободные топологические алгебры. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, **21**, № 2, 171—198 (РЖМат, 1958, 1882)
28. —, Определяющие соотношения в категориях. Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1095—1098 (РЖМат, 1959, 5634)
29. —, Структурная характеристика некоторых классов алгебр. Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 1, 29—32 (РЖМат, 1959, 5635)
30. —, Квазипримитивные классы абстрактных алгебр. Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 2, 187—189 (РЖМат, 1959, 174)
31. —, Модельные соответствия. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, **23**, № 3, 313—336 (РЖМат, 1960, 12554)
32. —, Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем. Алгебра и логика. Семинар, 1966, **5**, № 3, 3—9 (РЖМат, 1967, 2А243)
33. **Плоткин Б. И.**, Группы автоморфизмов алгебраических систем. М., «Наука», 1966, 603 стр.
34. **Скорняков Л. А.**, Неассоциативные свободные T-суммы тел. Матем. сб., 1958, **44**, № 3, 297—312 (РЖМат, 1959, 10889)
35. **Чакань Б.**, Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полу-

модулей и модулей. Acta scient. math., 1963, 2—4, № 1-2, 157—164 (РЖМат, 1964, 7А307)
36. —, Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр. Acta scient. math., 1964, 25, № 3-4, 202—208 (РЖМат, 1965, 3А264)
37. **Шайн Б. М.**, К теореме Биркгофа—Когаловского. Успехи матем. наук, 1965, 20, № 6, 173—174 (РЖМат, 1966, 5А278)
38. **Ширшов А. И.**, Подалгебры свободных лиевых алгебр. Матем. сб., 1953, 33, № 2, 441—452 (РЖМат, 1954, 2030)
39. **Adam A.**, On the definitions of direct product of universal algebra. Publ. Math., 1959, 6, № 3-4, 303—309 (РЖМат, 1965, 10А288)
40. Astromoff A., Some structure theorems for primal and categorical algebras. Math., Z., 1965, 87, № 3, 365—377 (РЖМат, 1965, 10А290)
41. **Bates G. E.**, Free loops and nets and their generalisations. Amer. J. Math., 1947, 69, 499—550
42. **Birkhoff G.**, Frinc O., Representation of lattices by sets. Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 64, 299—316
43. **Chang C. C.**, Jónsson B., Tarski A., Refinement properties for relational structures. Fundam. Math., 1964, 55, № 3, 249—281 (РЖМат, 1966, 3А249)
44. **Cohn P.**, Universal algebra. New York, Harper and Brathers 1965 (РЖМат, 1967, 5А276К)
45. **Crawley P.**, Jónsson B., Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems. Pacif. J. Math., 1964, 14, № 3, 797—855 (РЖМат, 1966, 6А249)
46. **Csákány B.**, Inner automorfisms of universal algebra. Publ. math. (Debrecen), 1965, 12, № 1-4, 331—333 (РЖМат, 1967, 4А227)
47. **Evans T.**, Embeddabelity and the word problem. J. London Math. Soc., 1953, 28, № 109, 76—80 (РЖМат, 1953, 119)
48. —, Properties of algebras almost equivalent to identities. J. London Math. Soc., 1962, 37, № 1, 53—59 (РЖМат, 1963, 3А256)
49. —, The isomorfism problem for some classes of multiplicative systems. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, 109, № 2, 303—312 (РЖМат, 1965, 2А327)
50. —, Endomorfisms of abstract algebras. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1961—1962, A66, № 1, 53—64 (РЖМат, 1963, 6А262)
51. **Feigelstock S.**, A universal subalgebra theorem. Amer. Math. Monthly, 1965, 72, 8, 884—888 (РЖМат, 1966, 9А227)
52. **Foster A.**, The identities of — and unique subdirect factorisation within — classes of universal algebras. Math. Z., 1955, 62, № 2, 171—188 (РЖМат, 1956, 7213)
53. —, Pixley A., Semi-categorical algebras. I. Semi-primal algebras. Math. Z., 1964, 83, № 2, 147—169 (РЖМат, 1965, 3А365)
54. —, —, Semi-categorical algebras. II. Math. Z., 1964, 85, № 2, 169—184 (РЖМат, 1965, 10А294).
55. —, Algebraic and Equational semi-maximality; equational spectra. I. Math. Z., 1966, 92, № 1, 30—50 (РЖМат, 1967, 10А227)
56. **Frayne T.**, Morel A. C., Scott D. S., Reduced direct products. Fundam. math., 1962, 51, № 3, 195—228 (РЖМат, 1965, 3А370)
57. **Fujiwara T.**, Note on isomorfism problem for free algebraic systems. Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 135—136 (РЖМат, 1956, 6464)
58. —, Remarks on the Jordan-Hölder-Schreier theorem. Proc. Japan Acad., 1955, 31, 3, 137—140 (РЖМат, 1957, 6895)
59. —, On mappings between algebraic system. I. Osaka Math. J., 1959, 11, № 2, 153—172 (РЖМат, 1961, 6А316)
60. —, On mappings between algebraic systems. II. Osaka Math. J., 1960, 12, № 2, 253—268 (РЖМат, 1962, 2А298)

61. —, On the permutablility of congruences on algebraic systems. Proc. Japan Acad., 1964, 40, 10, 787—792 (РЖМат, 1966, 3А259)
62. —, Murata K., On the Jordan-Hölder-Schreier theorem. Proc. Japan Acad., 1953, **29**, 151—153 (РЖМат, 1957, 5393)
63. Goldie A. W., The Jordan-Hölder theorem for general algebras. Proc. London Math. Soc., 1950, **52**, 107—131
64. —, The scope of the Jordan-Hölder-Schreier theorem in abstract algebra. Proc. London Math. Soc., 1952, **2**, № 7, 349—368
65. **Grätzer G.**, Free algebras over first order axiom systems. Magyar tud. akad. Mat. Kutato int. közl., 1963, **8**, № 1-2, 193—199 (РЖМат, 1965, 3А366)
66. —, On the family of certain subalgebras of universal algebra. Proc. Koninkl. akad. wet., 1965, **A68**, № 5, 790—802 (РЖМат, 1965, 9А226)
67. —, On the Jordan-Hölder theorem for universal algebras. Magyar tud. akad. mat. Kutató int. közl., 1963(1964), **8**, № 3, 397—406 (РЖМат, 1965, 10А287)
68. —, Schmidt E. Т., Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. Acta scient. math., 1963, **24**, № 1-2, 34—59 (РЖМат, 1964, 5А225)
69. **Hashimoto J.**, Direct, subdirect decompositions and congruence relations. Osaka Math. J., 1957, **9**, № 1, 87—112 (РЖМат, 1959, 1297)
70. **Hewitt G.**, The existence of free unions in classes of abstract algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 3, 417—422 (РЖМат, 1964, 5А230)
71. **Higgins P. J.**, Algebras with a scheme of operators. Math. Nachr., 1963, **27**, № 1-2, 115—132 (РЖМат, 1964, 11А232)
72. —, Presentations of gruppoids with applications to groups. Proc. Cambridge Philos Soc., 1964, **60**, № 1, 7—20 (РЖМат, 1964, 9А193)
73. **Hilton P. J.**, Ledermann W., On the Jordan-Hölder theorem in homological monoids. Proc. London Math. Soc., 1960, **10**, № 3, 321—334 (РЖМат, 1962, 7А232)
74. **Hughes N. J. S.**, The Jordan-Hölder-Schreier theorem for general algebraic systems. Compositio math., 1960, **14**, № 3, 228—236 (РЖМат, 1961, 8А276)
75. **Isbell J. R.**, Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras. Rozpr. math., 1964, **36**, 3—36 (РЖМат, 1965, 3А346)
76. **Jacobs E.**, Schwabauer R., The lattice of equational classes of algebras with one unary operation. Amer. Math. Monthly, 1964, 71, № 2, 151—155 (РЖМат, 1965, 2А382)
77. **Jónsson B.**, Algebraic extentions of relational systems. Math. Scand., 1962, 11, № 2, 179—205 (РЖМат, 1964, 7А310)
78. —, Tarski A., On two properties of free algebras. Math. Scand., 1961, **9**, № 1a, 95—101 (РЖМат, 1962, 3А72)
79. **Kalicki J.**, The number of equationally complete classes of equations. Proc. Koninkl. nederl. akad. metensch., 1955, **A58**, № 5, 660—662 (РЖМат, 1958, 5578)
80. —, Scott D., Equational completeness of abstract algebras. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 5, 650—659 (РЖМат, 1958, 2776)
81. **Keisler H. J.**, On some results of Jónsson and Tarski concerning free algebras. Math. Scand., 1961, 9, № 1a, 102—106 (РЖМат, 1962, 3А73)
82. —, Ultraproducts and elementary classes. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1961, **A64**, № 5, 477—495 (РЖМат, 1962, 8А76)
83. **Kochen S.**, Ultraproducts in the theory of models. Ann. Math., 1961, **74**, № 2, 221—261 (РЖМат, 1963, 6А77)

84. **Kolibiar M.**, Über directe Producte von Relativen. Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae Math., 1965, **10**, № 3, 1—9 (РЖМат, 1966, 7A327)
85. **Lambek J.**, Goursat's theorem and the Zassenhaus lemma. Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 45—56 (РЖМат, 1959, 4524)
86. **Lawvere F. W.**, Functorial semantics of algebraic theories. Proc. Nat. Acad. Sci., 1963, **50**, № 5, 869—872 (РЖМат, 1965, 1A285)
87. **Lyndon R. C.**, Properties preserved under algebraic constructions. Bull. Amer. Math.Soc., 1959, **65**, № 5, 287—299 (РЖМат, 1961, 7A98)
88. **Loś J.**, Normal subalgebras in general algebras. Colloq. math., 1964, **12**, № 2, 151—153 (РЖМат, 1966, 1A401)
89. **Makkai M.**, Solution of a problem of G. Grätzer concerning endomorphism semigroups. Acta math. Acad. scient. hung, 1964, **15**, № 3-4, 297—307 (РЖМат, 1965, 8A184)
90. **Marczewski E.**, A general scheme of the notions of independence in mathematics. Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 12, 731—736 (РЖМат, 1959, 9722)
91. — , Nombre d'éléments indepéndents et nombre d'éléments générateurs dans les algéres abstraites finies. Ann. mat. pura et appl., 1962, **59**, 1—9 (РЖМат, 1963, 7A208)
92. **Mitchell B.**, The full imbedding theorem. Amer. J. Math., 1964, **86**, № 3, 619—657 (РЖМат, 1965, 10A280)
93. **Monk D.**, On pseudo-simple universal algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, № 4, 543—546 (РЖМат, 1963, 4A222)
94. **Neumann P. M.**, W i e g o l d J., Schreier varieties of groups. Math. Z., 1964, **85**, № 5, 392—400 (РЖМат, 1965, 7A180)
95. **Pierce R. S.**, A note on free products of abstract algebras. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1963, **A66**, № 3, 401—407 (РЖМат, 1964, 4A255)
96. **Pixley A. F.**, Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 1, 105—109 (РЖМат, 1964, 1A321)
97. **Ribeiro H.**, S c h w a b a u e r R., A remark on equational completeness. Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1965, **7**, № 3-4, 122—123 (РЖМат, 1966, 5A280)
98. **Schmidt E. T.**, Universale Algebren mit gegebenen Automorphismengruppen und Kongruenzverbänden. Acta math. Acad. scient. hung., 1964, **15**, № 1-2, 37—45 (РЖМат, 1965, 2A383)
99. — , Universale Algebren mit gegebenen Automorphismengruppen und Unteralgebrenverbänden. Acta scient. math. 1963, **24**, № 3-4, 251—254 (РЖМат, 1965, 2A384)
100. **Schmidt J.**, Algebraic operations and algebraic independence in algebras with infinitary operations. Math. japon., 1962, **6**, № 3-4, 77—112 (РЖМат, 1965, 1A292)
101. — , Some properties of algebraically independent sets in algebras with infinitary operations. Fundam. math., 1964, **55**, № 2, 123—137 (РЖМат, 1965, 12A335)
102. **Slominski J.**, On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equationally definable contant elements. Fundam. Math., 1960, **48**, № 3, 325—341 (РЖМат, 1961, 10A275)
103. —, A theory of extentions of quasi-algebras to algebras. Roxpr. mat., 1964, **40**, 63 (РЖМат, 1965, 12A336)
104. —, On mappings between quasi-algebras. Colloq. math., 1966, **15**, № 1, 25—44
105. **Swierczcowski S.**, On isomorphic free algebras. Bull. Acad. polon.

sci., Ser. sci. math., astron. et phys., 1960, **8**, № 9, 587—588 (РЖМат, 1961, 10А272)

106. —, On two numerical constants associated with finite algebras. Ann. mat. pura ed appl., 1963, **62**, 241—245 (РЖМат, 1965, 3А362)
107. **Tarski A.**, Equationally complete rings and relation algebras. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. A-Indagationes math., 1956, **A59**, № 1, 39—46 (РЖМат, 1958, 1043)
108. **Thurston H. A.**, Derived operations and congruences. Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 29, 127—134 (РЖМат, 1959, 173)
109. **Urbanik K.**, Remarks on independence in finite algebras. Colloq. math., 1963, **11**, № 1, 1—12 (РЖМат, 1965, 1А290)
110. —, Linear independence in abstract algebras. Colloq. math., 1964, **14**, 233—255 (РЖМат, 1967, 9А184)
111. **Vaught R.**, Elementary classes closed under descending intersections. Proc. Amer. Math. Soc., 1966, **17**, № 2, 430—433 (РЖМат, 1967, 3А67)