

**Integration of Non-Abelian Lattices of Toda-type****Michael Gekhtman****Publication Date**

08-12-2023

**License**

This work is made available under a Exclusive rights in copyrighted work license and should only be used in accordance with that license.

**Citation for this work (American Psychological Association 7th edition)**

Gekhtman, M. (2016). *Integration of Non-Abelian Lattices of Toda-type* (Version 1). University of Notre Dame. <https://doi.org/10.7274/R00K26HT>

This work was downloaded from CurateND, the University of Notre Dame's institutional repository.

For more information about this work, to report or an issue, or to preserve and share your original work, please contact the CurateND team for assistance at [curate@nd.edu](mailto:curate@nd.edu).

Академия наук Украинской ССР  
Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

На правах рукописи

Гехтман Михаил Исаакович

УДК 517.984 + 530.1

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕАБЕЛЕВЫХ ЦЕПОЧЕК ТИПА ТОДЫ

01.01.01 - математический анализ

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -  
академик АН УССР,  
доктор физико-математических  
наук, профессор .  
БЕРЕЗАНСКИЙ Ю.М.



## О Г Л А В Л Е Н И Е

В в е д е н и е . . . . .	3
ГЛАВА I. Прямая и обратная спектральная задача для разностных выражений с операторными коэффициентами	22
§ I.1. Необходимые сведения спектральной теории якобиевых матриц . . . . .	22
§ I.2. Аналог прямой и обратной спектральной задачи для несимметричных разностных выражений с операторными коэффициентами . . . . .	32
ГЛАВА II. Интегрирование неабелевых цепочек нелинейных уравнений . . . . .	60
§ 2.1. Неабелев аналог цепочки Тоды, связанный с операторными якобиевыми матрицами . . . . .	60
§ 2.2. Полубесконечные и конечные неабелевы цепочки, связанные с несимметричными разностными выражениями с операторными коэффициентами . . . . .	93
§ 2.3. Представление решений бесконечной цепочки Тоды в виде ряда по степеням времени . . . . .	114
Л и т е р а т у р а . . . . .	126

## В В Е Д Е Н И Е

В последние десятилетия в математической физике уделяется большое внимание изучению точно решаемых нелинейных эволюционных уравнений. Для их интегрирования привлекаются методы различных областей современной математики – обратной задачи теории рассеяния, алгебраической геометрии, теории групп и алгебр Ли и др. Изложению этих методов посвящен ряд монографий

[ 1 , 19 , 28 , 35 , 36 ] .

Цепочка Тоды, описывающая эволюцию системы частиц с экспоненциальным взаимодействием между соседями, является одной из фундаментальных нелинейных дискретных моделей. Эта система нелинейных дифференциально-разностных уравнений обладает большим числом приложений в различных областях естествознания (см., например, [ 37 ] ). Свойства цепочки Тоды во многом являются характерными для интегрируемых нелинейных дифференциально-разностных уравнений, поэтому многие методы интегрирования сначала применяются к ней, а затем, после соответствующих модификаций, переносятся на различные обобщения. Одним из таких обобщений являются неабелевы цепочки Тоды, в которых роль неизвестных играют матрично- или операторно-значные функции. Впервые введенная А.Поляковым, как дискретный вариант уравнения главных киральных полей, бесконечная в обе стороны неабелева цепочка Тоды исследовалась М.Бруши, С.В.Манакowym, О.Рагниско и Д.Леви в [ 42 ] методами обратной задачи рассеяния. И.М.Кричевер в [ 25 ] получил

явные выражения для периодических решений в терминах тэта-функций. Ли-алгебраический подход рассматривался А.Г.Рейманом и М.А.Семеновым-Тян-Шанским в [30].

Настоящая работа посвящена интегрированию полубесконечных и конечных неабелевых цепочек типа Тоды, то есть нелинейных дифференциально-разностных уравнений, которые могут быть записаны в форме Лакса

$$\dot{L}(t) = [L(t), A(t)], \quad (1)$$

где

$$L(t) = \begin{pmatrix} B_0(t) & C_0(t) & & 0 \\ A_0(t) & B_1(t) & C_1(t) & \\ & A_1(t) & \ddots & \ddots \\ 0 & & A_n(t) & B_n(t) & C_n(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

- трехдиагональная матрица порядка  $N \leq \infty$ , элементами которой являются операторы из  $\mathcal{L}(H)$  - пространства ограниченных линейных операторов, действующих в некотором банаховом или гильбертовом пространстве  $H$  (операторы  $A_n, C_n$  ( $n \leq N$ ) считаются обратимыми), а  $A(t)$  - некоторая конечнодиагональная матрица того же порядка, операторные элементы которой зависят от элементов матрицы  $L(t)$ . (Между элементами  $A_n, B_n, C_n$  ( $n \leq N$ ) матрицы (2), вообще говоря, существуют некоторые связи.) Наряду с матрицей  $L(t)$ , можно рассматривать разностное выражение, для которого мы сохраним то же обозначение, действующее на последовательности  $(u_n)_{n=0}^N$  векторов из  $H$ :

$$(L u)_n = A_{n-1} u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} \quad (n \leq N) \quad (3)$$

с краевым условием  $U_{-1} = 0$  (если  $N < \infty$ , добавляется еще одно краевое условие  $U_{N+1} = 0$ ).

В работе развивается метод обратной спектральной задачи интегрирования нелинейных дифференциально-разностных уравнений вида (I). Этот метод, основанный на применении обратной спектральной задачи для классических якобиевых матриц, был впервые предложен Д.М.Березанским ([3, 41]) для интегрирования полубесконечной цепочки Тоды и позволял строить решения для произвольных ограниченных начальных данных, не удовлетворяющих никаким асимптотическим условиям при  $n \rightarrow \infty$ . В [7, 8, 38] метод был перенесен на конечные цепочки Тоды, а также на случай неизоспектральных деформаций. Для применения его к уравнениям вида (I) необходим аналог прямой и обратной спектральной задачи для разностных выражений с операторными коэффициентами (3). В случае операторных якобиевых матриц, то есть, когда  $H$  - гильбертово пространство и

$$A_n > 0, B_n = B_n^* \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad (4)$$

подобная теория была развита М.Г.Крейном ([22]) для случая матричных коэффициентов, а затем Д.М.Березанским и В.Г.Тарнопольским ([4, 34]) для произвольного гильбертова пространства  $H$ . Однако при изучении уравнений (I) часто возникают разностные выражения (3), не являющиеся симметричными. Следуя работам [27, 31] В.А.Марченко и Ф.С.Рофе-Бекетова по спектральной теории несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля, Ю.Л.Кишакевич ([20, 21]) ввел обобщенную операторную спектральную функцию для (3) с коэффициентами из  $\mathcal{L}(H)$ , где  $H$  - банахово пространство и рассмотрел обратную задачу для частного случая  $A_n = C_n = I$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). (Несколько отличный подход применил Г.Ш.Гусейнов в [14] при изучении якобиевых матриц с комп-

В этой работе рассмотрен аналог прямой и обратной спектральной задачи для полубесконечных, конечных и бесконечных в обе стороны разностных выражений вида (3). При решении обратной задачи, наряду с аналогом процедуры псевдоортогонализации, описанной в книге [ 5 ], получены формулы для коэффициентов (3), обобщающие классические формулы, выражающие элементы якобиевой матрицы через моменты спектральной меры. Кроме того, доказана теорема, характеризующая обобщенную спектральную функцию бесконечного в обе стороны разностного выражения (3) – обобщение результата для классических якобиевых матриц (см. [2, 5]).

Эти результаты дают возможность распространить метод обратной спектральной задачи, развитый в [ 3 , 41 ] на случай уравнений вида (I): полубесконечных и конечных неабелевых цепочек Тоды и Вольтерра.

Выбирая в качестве коэффициентов (3) матрицы специального вида, можно получить из (I) различные цепочки обычных дифференциально-разностных уравнений (см., например, [ 9 ] ). В работе рассмотрен пример такой редукции – разностный аналог уравнения МКДФ. Отметим, что эта система была также получена Р.И.Ямиловым при классификации дискретных эволюционных уравнений по признаку бесконечномерности алгебры симметрий.

Несмотря на то, что бесконечные в обе стороны цепочки могут быть записаны в виде (I), (2) при помощи процедуры удвоения ([ 1 ]), применение к ним метода обратной спектральной задачи значительно усложняется. Это можно наблюдать уже на примере обычной бесконечной цепочки Тоды

$$a_n = \frac{1}{2} a_n (b_{n+1} - b_n), \quad \bar{b}_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 \quad (n \in \mathbb{Z}, a_n > 0, b_n = \bar{b}_n). \quad (5)$$

Известно несколько случаев, в которых можно построить решения [page 7]

(5). В периодическом случае:  $a_n(t) = a_{n+N}(t)$ ,  $b_n(t) = b_{n+N}(t)$

задача интегрирования системы была сведена к проблеме обращения Якоби в [46], затем И.М.Кричевер в [24] получил явное выражение для решений в терминах тэта-функций. Интегрирование методом обратной задачи рассеяния при предположениях

$$0 < \prod_{n \in \mathbb{Z}} 2a_n(0) < \infty, \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n(0) \right| < \infty$$

было выполнено С.В.Манаковым [26] и Г.Флашкой [44, 45].

Наконец, решение в классе операторов Гильберта-Шмидта и в классе компактных операторов было различными методами построено А.Ю.Далецким и Г.Б.Подколзиным [15] и Н.В.Жернаховым [18].

В данной работе для произвольных ограниченных в совокупности начальных данных получены формулы для коэффициентов рядов, представляющих решения системы (5).

Кратко изложим содержание диссертации. Она состоит из введения, двух глав и списка литературы. Используется сквозная трехиндексная нумерация всех формул и утверждений: первая цифра указывает номер главы, вторая - номер параграфа, третья - порядковый номер в пределах данного параграфа.

Первая глава "Прямая и обратная спектральная задача для разностных выражений с операторными коэффициентами" посвящена вопросам спектральной теории разностных выражений вида (3).

В § I.1 излагаются необходимые сведения спектральной теории якобиевых матриц: прямая и обратная спектральная задача для операторных якобиевых матриц, процедура псевдоортогонализации; формулы, выражающие элементы полубесконечной якобиевой матрицы через моменты спектральной меры, спектральная теория конечных и бесконечных якобиевых матриц.

В § 1.2 рассматриваются несимметричные разностные выражения вида (3), действующие на последовательности векторов из некоторого банахова пространства  $H$ . В п.1 каждому полубесконечному разностному выражению (3) ставится в соответствие обобщенная спектральная функция  $R: P(H) \times P(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ , где  $P(H)$  — пространство полиномов с коэффициентами из  $\mathcal{L}(H)$ .  $R$  — линейна по каждой переменной и для любых  $R(\lambda)$ ,  $Q(\lambda) \in P(H)$ ;  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$ .  $R(T_1 R(\lambda), Q(\lambda) T_2) = T_1 (R(R(\lambda), Q(\lambda)) T_2$ . Кроме того, выполняются "соотношения ортогональности"

$$R(P_n(\lambda), P_m^+(\lambda)) = \delta_{nm} 1 \quad (n, m \in \mathbb{Z}_+) \quad (6)$$

для последовательностей полиномов  $(P_n(\lambda))_{n=0}^\infty, (P_n^+(\lambda))_{n=0}^\infty$ , заданных рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} P_{-1}(\lambda) &= P_{-1}^+(\lambda) = 0, P_0(\lambda) = P_0^+(\lambda) = 1, \\ A_{n-1} P_{n-1}(\lambda) + B_n P_n(\lambda) + C_n P_{n+1}(\lambda) &= \lambda P_n(\lambda), \\ P_{n-1}^+(\lambda) C_{n-1} + P_n^+(\lambda) B_n + P_{n+1}^+(\lambda) A_n &= \lambda P_n^+(\lambda) \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \end{aligned} \quad (7)$$

Доказана

Теорема 1.2.1. Для того, чтобы билинейное отображение  $R: P(H) \times P(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$  являлось обобщенной спектральной функцией некоторого полубесконечного разностного выражения вида (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1.  $R(1, 1) = 1$ ;
- 2)  $R(\lambda^n 1, \lambda^m 1) = R(\lambda^{n+m} 1, 1) = S_{n+m} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+$ ;

3. Последовательность  $(S_n)_{n=0}^\infty$ , которую мы назовем последовательностью моментов отображения  $R$ , невырождена, то есть для любого  $n \in \mathbb{Z}_+$  оператор-матрица  $(S_{j+k})_{j,k=0}^n$  является обратимым оператором в пространстве  $H \oplus \dots \oplus H$ .

Если разностное выражение (3) имеет вид

$$(Lu)_n = A_{n-1}u_{n-1} + B_n u_n + u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, u_{-1} = 0), \quad (8)$$

то теорему I.2.1 можно уточнить следующим образом.

Теорема I.2.2. Между отображениями  $R$ , удовлетворяющими условиям теоремы I.2.1 и разностными выражениями  $L$  вида (8) существует взаимнооднозначное соответствие, которое задается формулами

$$R(\lambda^n 1, 1) = S_n = (L^n)_{00} \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \quad (9)$$

$$A_m = R(\lambda P_{m+1}(\lambda), P_m^+(\lambda)), B_m = R(\lambda P_m(\lambda), P_m^+(\lambda)) \quad (m \in \mathbb{Z}_+),$$

где последовательности полиномов  $P_n(\lambda) = \lambda^n 1 + \dots$ ;  $P_n^+(\lambda)$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) однозначно восстановлены по  $R$  при помощи процедуры псевдоортогонализации.

Справедливы рекуррентные формулы, позволяющие восстановить коэффициенты (8) по моментной последовательности  $(S_n)_{n=0}^\infty$  и обобщающие аналогичные формулы в скалярном случае. Пусть  $S^{(m)} = (S_n^{(m)})_{n=0}^\infty$  — моментная последовательность, отвечающая "сдвинутому" разностному выражению  $(L_m u)_n = A_{n+m-1}u_{n-1} + B_{n+m}u_n + u_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+, u_{-1} = 0$ ). Положим

$$\mathcal{D}_n(S^{(m)}) = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n, i_1, \dots, i_k \geq 1} (-1)^{k+1} S_{i_1}^{(m)} \dots S_{i_k}^{(m)} \quad (n, m \in \mathbb{Z}_+, \mathcal{D}_0 = 1). \quad (10)$$

Теорема I.2.3. Справедливы рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} S_n^{(m+1)} &= \mathcal{D}_{n+2}(S^{(m)}) \mathcal{D}_2(S^{(m)})^{-1}, \\ B_m &= S_1^{(m)}, A_m = S_2^{(m)} - (S_1^{(m)})^2 \quad (n, m \in \mathbb{Z}_+). \end{aligned} \quad (11)$$

В п. 2 § I.2 результаты п. I перенесены на случай конечных разностных выражений вида (3). Доказана



Теорема I.2.4. Для того, чтобы последовательность операторов из  $\mathcal{L}(H) (S_n)_{n=0}^{\infty}$  являлась моментной последовательностью некоторого разностного выражения вида (3) ( $N < \infty$ ) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1.  $S_0 = 1$

2. Для некоторого  $F_0, \dots, F_N \in \mathcal{L}(H)$

$$S_{N+k+1} = \sum_{j=0}^N F_j S_{j+k} \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

3. При  $n=0, \dots, N$  оператор-матрица  $(S_{j+k})_{j,k=0}^n$  является обратимым оператором в пространстве  $H^{n+1}$ .

П.3 посвящен бесконечным в обе стороны разностным выражениям

$$(Lu)_n = A_{n-1}u_{n-1} + B_nu_n + C_nu_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (12)$$

которые при помощи процедуры удвоения приводятся к виду (3), следовательно, им может быть поставлена в соответствие обобщенная спектральная функция  $R$ . Справедлива теорема, обобщающая теорему I.1.4, доказанную в [13].

Теорема I.2.5. Для того, чтобы отображение  $R$ , удовлетворяющее условиям теоремы I.2.1, являлось обобщенной спектральной функцией некоторого разностного выражения (12) необходимо и достаточно, чтобы для его моментной последовательности

$$(S_n)_{n=0}^{\infty} = S \quad \text{выполнялось любое из эквивалентных условий:}$$

1. Для любого  $n \in \mathbb{Z}_+$   $\sum_{k=0}^n S_k [S_1, T] S_{n-k} = [S_{n+1}, T]$ .

2. Для любого  $n \geq 2$   $[\Phi_n(S), T] = 0$ .

Здесь  $\Phi_n(S)$  задается формулами (10),  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

В § 1.2 приводятся также условия, характеризующие моментные последовательности разностных выражений (3), (12), для которых  $B_n = 0$  соответственно при  $n \in \mathbb{Z}_+$  или  $n \in \mathbb{Z}$ .

Глава II "Интегрирование неабелевых цепочек нелинейных уравнений" посвящена развитию метода обратной спектральной задачи для уравнений вида (1), (2). В § 2.1 рассматриваются неабелевы цепочки, связанные с разностным выражением (3), коэффициенты которого удовлетворяют условию (4). Общий вид таких цепочек

$$\dot{A}_n = A_n \Psi_{n+1} - \Psi_n A_n + B_n \oplus_n - \oplus_n B_{n+1}, \quad (I3)$$

$$\dot{B}_n = A_{n-1} \oplus_{n-1} - \oplus_n A_n + A_n \Phi_n - \Phi_{n-1} A_{n-1} + B_n \Psi_n - \Psi_n B_n, \\ (n \in \mathbb{Z}_+; A_{-1} = 0; t \in [0, T]),$$

где  $\Phi_n, \Psi_n, \oplus_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) находятся из соотношений

$$\oplus_n = A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} \oplus_0 A_1 \dots A_n, \Phi_n = A_n \dots A_1 \Phi_0 A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1}, \\ A_n \Psi_{n+1} + \Psi_{n+1} A_n = A_n \Psi_n + \Psi_n A_n + \oplus_n B_{n+1} + B_{n+1} \Phi_n - \\ - B_n \oplus_n - \Phi_n B_n \quad (I4)$$

( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Конкретный вид системы (I3) зависит от вида неизвестных  $A_n, B_n$  и выбора  $\Phi_0, \Psi_0, \oplus_0$ . Например, если положить

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{-n-2} & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} (n \in \mathbb{Z}_+), B_n = \begin{pmatrix} b_{-n-1} & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix} (n \in \mathbb{N}),$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \Psi_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -a_{-1} \\ a_{-1} & 0 \end{pmatrix}, \Phi_0 = -\oplus_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_0,$$

то система (I3) эквивалентна бесконечной цепочке Тоды (5).

В п.2 исследуется эволюция спектральных характеристик разностного выражения  $L(t)$ , удовлетворяющего уравнению Лакса (I), которое эквивалентно системе (I3). В данном случае  $L(t)$  - якобиева матрица, которой соответствует оператор-

ная спектральная мера  $d\mathcal{G}(\lambda; t)$ . Показано, что  $d\mathcal{G}(\lambda; t)$  эволюционирует согласно уравнению

$$\begin{aligned} d\dot{\mathcal{G}}(\lambda; t) = & -(\Psi_0(t) + \Phi_0(t) A_0^{-1}(t)(\lambda 1 - \\ & - B_0(t)) d\mathcal{G}(\lambda; t) + d\mathcal{G}(\lambda; t)(\Psi_0(t) + (\lambda 1 - \\ & - B_0(t)) A_0^{-1}(t) \Phi_0(t)). \quad (\lambda \in \mathbb{R}^1; t \in [0; T]). \end{aligned} \quad (I5)$$

В частности, в случае бесконечной цепочки Тоды уравнение эволюции матричной  $2 \times 2$  спектральной меры  $d\mathcal{G}(\lambda; t)$  примет вид

$$\begin{aligned} 2 d\dot{\mathcal{G}}(\lambda; t) = & J \left( \lambda 1 + \begin{pmatrix} b_{-1} & 2a_{-1} \\ 2a_{-1} & b_0 \end{pmatrix} \right) d\mathcal{G}(\lambda; t) + \\ & + d\mathcal{G}(\lambda; t) \left( \lambda 1 - \begin{pmatrix} b_{-1} & 2a_{-1} \\ 2a_{-1} & b_0 \end{pmatrix} \right) J. \quad (J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}). \end{aligned} \quad (I6)$$

Наиболее простой вид уравнение (I5) имеет в случае системы

$$\begin{aligned} \dot{B}_n &= A_n^2 - A_{n-1}^2 + \frac{1}{2} [B_n, \Psi_n] \\ \dot{A}_n &= \frac{1}{2} (A_n(\Psi_{n+1} + B_{n+1}) - (\Psi_n + B_n)A_n) \quad (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1} = 0), \end{aligned} \quad (I7)$$

где  $\Psi_0 = 0, \Psi_n \ (n \in \mathbb{N})$  определяются из соотношений

$$A_n \Psi_{n+1} + \Psi_{n+1} A_n = A_n \Psi_n + \Psi_n A_n + [B_{n+1} + B_n, A_n].$$

В п.3 доказана

Теорема 2.1.1. Для произвольных начальных данных

$(A_n(0), B_n(0))_{n=0}^{\infty}$  ограниченных по норме в совокупности, существует и единственно решение задачи Коши для системы (I7).

Процедура построения решения такова: по начальным данным строится операторная якобиева матрица  $L(0)$  и отвечающая ей

спектральная мера  $d\varrho(\lambda; 0)$ . Эволюция спектральной меры задается уравнением [page 13]

$$d\varrho(\lambda; t) = X(t) e^{\lambda t} d\varrho(\lambda; 0) X^*(t),$$

где

$$\dot{X}(t) = -\frac{1}{2} X(t) \dot{F}(t) F^{-1}(t), X(0) = I, F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\varrho(\lambda; 0).$$

В произвольный момент времени  $t \in [0, +\infty)$  решения  $A_n(t)$ ,  $B_n(t)$  восстанавливаются по спектральной мере  $d\varrho(\lambda; t)$  при помощи формул:

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) P_{n+1}^*(\lambda; t), \\ B_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $(P_n(\lambda; t))_{n=0}^{\infty}$  — система полиномов, построенная посредством псевдоортогонализации степеней  $1, \lambda 1, \lambda^2 1, \dots$  относительно меры  $d\varrho(\lambda; t)$ , то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) P_m^*(\lambda; t) = \delta_{mn} 1, \quad (m, n \in \mathbb{Z}_+).$$

В п.4 рассматривается связь между системой (17) и системами

$$\dot{D}_n = C_n - C_{n-1}, \dot{C}_n = C_n D_{n+1} - D_n C_n \quad (n \in \mathbb{Z}_+, C_{-1} \equiv 0), \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} (G_n^{-1} \dot{G}_n) = G_n^{-1} G_{n+1} - G_{n-1}^{-1} G_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

(20)

$$\frac{d}{dt} (G_0^{-1} \dot{G}_0) = G_0^{-1} G_1.$$

Системы (19), (20) эквивалентны и являются ограничениями [page 14] полуось неабелевых цепочек, рассмотренных в [42]. Обозначим через  $X = X(t)$  решение уравнения  $\dot{X} = \frac{1}{2} X G_0^{-1} \dot{G}_0$ ,  $X(0) = 1$ . Рассматриваются решения (20), удовлетворяющие условию:

Для любого  $t \geq 0$  оператор  $X G_0^{-1} \dot{G}_0 X^{-1}$  самосопряжен, а операторы  $X G_0^{-1} G_n X^{-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) — положительны. (21)

Справедлива

Теорема 2.1.2. Между решениями системы (20), удовлетворяющими условию (21) и решениями системы (17) существует взаимнооднозначное соответствие, которое задается соотношениями

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_0 X^{-1} A_0 \dots A_{n-1} A_n^2 A_{n-1} \dots A_0 X, \\ \dot{G}_n &= G_0 X^{-1} A_0 \dots A_{n-1} B_n A_{n-1} \dots A_0 X \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \\ \dot{X} &= \frac{1}{2} B_0 X. \end{aligned}$$

П.5 § 2.1 посвящен применению полученных в пп. I-3 результатов для интегрирования конечнодиагональных потоков Тоды, которые изучались в [43]. В этом случае разностное выражение (3), фигурирующее в уравнении Лакса (1), имеет вид

$$(Lu)_n = A_{n-1}^* u_{n-1} + B_n u_n + A_n u_n \quad (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1} = 0),$$

где  $A_n, B_n$  — конечномерные матрицы с действительными элементами, причем  $B_n = B_n^*$ , а  $A_n$  — нижнетреугольные с положительной диагональю ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Соответствующая конечнодиагональному потоку Тоды нелинейная система может быть записана в виде

$$\dot{B}_n = 2(A_n A_n^* - A_{n-1} A_{n-1}^*) + [B_n, D_n]$$

$$\dot{A}_n = A_n(B_{n+1} + D_{n+1}) - (B_n + D_n)A_n \quad (A_{-1} = 0, n \in \mathbb{Z}_+). \quad (22)$$

Здесь  $(D_n)_{jk} = \text{sign}(j-k)(B_n)_{jk}$  ( $j, k = 0, \dots, N-1$ , где  $N$  - порядок матриц  $A_n, B_n$ ). Используя полярное разложение  $A_n(0) = C_n(0) V_n(0)$ , где  $C_n(0) > 0$ , а  $V_n(0)$  унитарная матрица, построим блочно-диагональную матрицу  $U(0) = (1, V_0(0), \dots, V_{n-1}(0), V_n(0), \dots)$ . Тогда коэффициенты разностного выражения  $U(0)L(0)U^{-1}(0)$  удовлетворяют условию (4). Доказана

Теорема 2.1.3. Для произвольных ограниченных в совокупности начальных данных  $(A_n(0), B_n(0))_{n=0}^{\infty}$  существует и единственно решение задачи Коши для системы (2I). Процедура построения решения такова: по начальным данным строится операторная якобиева матрица  $U(0)L(0)U^{-1}(0)$  и соответствующая ей спектральная мера  $d\varrho(\lambda; 0)$ . Эволюция меры задается формулой

$$d\varrho(\lambda; t) = X(t) e^{2\lambda t} d\varrho(\lambda; 0) X^*(t),$$

где  $X(t)$  - нижнетреугольная с положительными диагональными элементами матрица, удовлетворяющая уравнению

$$X^*(t) X(t) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\lambda t} d\varrho(\lambda; 0) \right)^{-1}.$$

В произвольный момент времени  $t$  по  $d\varrho(\lambda; t)$  восстанавливается при помощи формул (18) коэффициенты операторной якобиевой матрицы  $\tilde{L}(t)$ . Тогда  $A_n(t)$  и  $B_n(t)$  являются коэффициентами  $L(t) = U^{-1}(t) \tilde{L}(t) U(t)$ , где унитарный оператор  $U(t) = \text{diag}(1, U_1(t), \dots)$  однозначно определяется условием нижнетреугольности матриц  $A_n(t)$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ).

В § 2.2 рассматриваются полубесконечные и конечные неабелевы цепочки, связанные с несимметричными разностными выражениями вида (8), аналог прямой и обратной спектральной задачи для которых был получен в § 1.2. В п. I описан общий вид цепочек, допускающих представление Лакса (I). Именно, показано, что для того, чтобы имело смысл уравнение (I) с  $L(t)$  вида (8) необходимо, чтобы коэффициенты конечно-диагональной матрицы  $A(t)$  или соответствующего разностного выражения

$$(Au)_n = \sum_{j=-\ell}^m C_{j,n} u_{n+j} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, C_{pq} = 0 \text{ при } p+q < 0)$$

удовлетворяли рекуррентным соотношениям

$$C_{p,j+1} = C_{p,j} + C_{p+1,j} B_{j+p+1} - B_j C_{p+1,j} + C_{p+2,j} A_{j+p+1} - A_{j-1} C_{p+2,j-1} \\ (0 \leq p \leq m, j \in \mathbb{Z}_+),$$

$$C_{-p,j} = (A_{j-1} C_{-p,j-1} + B_j C_{-p-1,j} + C_{-p-2,j+1} - C_{-p-2,j} - \\ - C_{-p-1,j} B_{j-p-1}) A_{j-p-1}^{-1} \quad (1 \leq p \leq \ell; j \geq p).$$

Тогда неабелева цепочка, эквивалентная (I), имеет вид

$$\dot{A}_n = A_n C_{0,n} - C_{0,n+1} A_n + C_{-2,n+2} - C_{-2,n+1} + B_{n+1} C_{-1,n+1} - \\ - C_{-1,n+1} B_n, \quad (23)$$

$$\dot{B}_n = A_{n-1} C_{1,n-1} - C_{1,n} A_n + C_{-1,n+1} - C_{-1,n} + [B_n, C_{0,n}] \\ (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1} = 0)$$

и ее вид полностью определяется выбором

$$C_{k,-k} = C_k \quad (k = -\ell, \dots, -1), C_{k0} = C_k \quad (k = 0, \dots, m).$$

Найдено уравнение эволюции обобщенной спектральной функции  $R$ , отвечающей разностному выражению  $L(t)$ , которое явля-

ется решением (I): для любых  $u(\lambda), v(\lambda)$  - операторных полиномов с постоянными коэффициентами из  $\mathcal{L}(H)$

$$R(u(\lambda), v(\lambda))^* = R(u(\lambda), Q_1(\lambda)v(\lambda) - R(u(\lambda)Q_2(\lambda), v(\lambda)), \quad (24)$$

где

$$Q_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\ell} Q_{-k} \lambda^k = \sum_{k=0}^{\ell} P_k^+(\lambda) C_{-k},$$

$$Q_2(\lambda) = \sum_{j=0}^m Q_j \lambda^j = \sum_{j=0}^m Q_j \lambda^j = \sum_{j=0}^m C_j P_j(\lambda),$$

а  $P_k^+(\lambda), P_j(\lambda)$  - полиномы из (7).

Обратно, если для некоторых полиномов  $Q_1(\lambda), Q_2(\lambda)$  отображение  $R = R(t): P(H) \times P(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ , удовлетворяющее условиям теоремы I.2.I, эволюционирует согласно (24), то восстановленные по  $R$  разностное выражение  $L(t)$  удовлетворяет уравнению Лакса (I), причем коэффициенты  $A(t)$  равны

$$C_{-k,p} = R(P_p(\lambda), Q_1(\lambda)P_{p-k}^+(\lambda)),$$

$$C_{j,q} = R(P_q(\lambda)Q_2(\lambda), P_{q+j}^+(\lambda))$$

$$(1 \leq k \leq \ell; p \geq k; 0 \leq j \leq m, q \in \mathbb{Z}_+).$$

В п.2 изучаются примеры систем вида (23) - полубесконечные неабелевы цепочки Тоды и Вольтерра. Для неабелевой цепочки Тоды

$$\dot{A}_n = B_{n+1}A_n - A_nB_n, \quad \dot{B}_n = A_n - A_{n-1} \quad (25)$$

( $n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1} = 0$ ) доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.I. Для произвольных начальных данных

$(A_n(0), B_n(0))_{n=0}^{\infty}$ , ограниченных в совокупности, решение

задачи Коши для системы (25) существует и единственно на некотором интервале  $[0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ). Процедура построения решения

такова: по начальным данным строится разностное выражение  $L(0)$



и последовательность моментов  $S_n(0) = (L^n(0))_{00}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ), [page 18]  
 значения моментов для произвольного  $t \in [0, \delta)$  задаются  
 формулами

$$S_n(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S_{n+k}(0) \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S_k(0) \right)^{-1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad (26)$$

наконец, формулы (I0), (II) позволяют восстановить неизвестные функции  $A_n(t), B_n(t)$ . Если, кроме того, на некотором интервале  $[t_1, t_2)$  ( $t_1 > \delta$ ) последовательность (26) невырождена, то функции  $A_n(t), B_n(t)$ , восстановленные по ней при помощи (I0), (II), удовлетворяют системе (25).

Совершенно аналогичная теорема справедлива для неабелевой цепочки Вольтерра

$$\dot{A}_n = A_{n+1}A_n - A_nA_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1} = 0) \quad (27)$$

с той разницей, что эволюция моментов в случае (27) задается формулами

$$S_{2n}(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S_{2(n+k)}(0) \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S_{2k}(0) \right)^{-1},$$

$$S_{2n+1}(t) \equiv 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

В п.3 проводится редукция цепочки (27) к разностному аналогу уравнения МКД

$$\dot{a}_n = (a_n^2 - 1)(a_{n+1} - a_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+, a_{-1} = -1) \quad (28)$$

путем выбора неизвестных  $A_n$  в (27) в виде

$$A_{2n} = (a_{2n+1} - 1) \text{diag}(a_{2n} - 1, a_{2n} + 1), A_{2n+1} = (a_{2n+1} + 1) \times \\ \times \text{diag}(a_{2n+2} + 1, a_{2n+2} - 1).$$

Соответствующая последовательность моментов в этом случае имеет вид  $S_n = \text{diag}(S_{n,1}, S_{n,2})$ . Положим

$$D_{n,i}(t) = \det \left( \sum_{p=0}^{\infty} S_{j+k+2p,i}(0) \frac{t^p}{p!} \right)_{j,k=0}^n \quad (i=1,2).$$

$(a_n(0))_{n=0}^{\infty}$ , ограниченных в совокупности, решение задачи Коши для системы (23) существует и единственно на интервале  $[0, \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$  и задается формулами

$$\frac{a_{2n}(t)-1}{a_{2n}(t)+1} = \frac{D_{2n-1,1}(t)D_{2n+1,1}(t)D_{2n,2}^2(t)}{D_{2n-1,2}(t)D_{2n+1,2}(t)D_{2n,1}^2(t)},$$

$$a_{2n+1}(t)-1 = \frac{D_{2n-1,1}(t)D_{2n+1,1}(t)}{(a_{2n}(t)-1)D_{2n,1}^2(t)}.$$

П.4 § 2.2 посвящен переносу результатов пп. I-3 на случай конечных неабелевых цепочек.

§ 2.3 посвящен представлению решений бесконечной цепочки Тоды (5) в виде ряда по степеням времени  $t$ . Пусть начальные данные для (5)  $(a_n(0), b_n(0))_{n=-\infty}^{\infty}$  ограничены в совокупности. Для фиксированных  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $K > 0$  рассмотрим конечную якобиеву матрицу

$$L(n, K, 0) = \begin{pmatrix} b_{n-K}(0) & a_{n-K}(0) & & 0 \\ a_{n-K}(0) & b_{n-K+1}(0) & a_{n-K+1}(0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & a_{n+K}(0) & b_{n+K+1}(0) \end{pmatrix},$$

которой соответствует набор спектральных данных: собственные значения  $(\lambda_j(n, K))_{j=0}^{2K+1}$ , скачки спектральной меры  $(\rho_j(n, K))_{j=0}^{2K+1}$  и последовательность моментов  $(S_p(n, K))_{p=0}^{\infty}$ , которая задается формулами  $S_p(n, K) = \sum_{j=0}^{2K+1} \lambda_j^p(n, K) \rho_j(n, K)$ .  
Зададим функции  $D_m(n, K, t)$

$$D_m(n, k, t) = \det \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} S_{p+q+l}(n, k) \right)_{p, q=0}^N =$$

$$= \sum_{0 \leq p_0 < \dots < p_m \leq 2K+1} e^{(\lambda_{p_0}(n, k) + \dots + \lambda_{p_m}(n, k))t} p_{p_0}(n, k) \dots p_{p_m}(n, k) W^2(\lambda_{p_0}(n, k),$$

$$\dots \lambda_{p_m}(n, k)),$$

где  $W(V_0, \dots, V_m) = \det(V_p^q)_{p, q=0}^m$  - определитель Вандермонда.

Доказана

Теорема 2.3.1. Пусть начальные данные  $(a_n(0), b_n(0))_{n=-\infty}^{\infty}$  для системы (5) ограничены в совокупности некоторой константой  $C$ . Тогда решение системы существует и единственно, причем для некоторого  $\delta = \delta(C)$  на интервале  $[0, \delta)$  решения могут быть представлены в форме ряда

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{nk}}{k!} t^k, \quad b_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{nk}}{k!} t^k,$$

где

$$C_{nk} = \frac{d^k}{dt^k} (D_{k-1}(n, k, \cdot) D_{k+1}(n, k, \cdot) / D_k(n, k, \cdot))^{\frac{1}{2}}(0)$$

$$d_{nk} = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \ln(D_k(n, k, \cdot) / D_k(n, k, \cdot))(0).$$

В § 2.3 получены также рекуррентные формулы для решения уравнения (16), описывающего эволюцию матричной спектральной меры, отвечающей решению бесконечной цепочки Тоды. Решение уравнения (16) записывается в форме

$$dg(\lambda; t) = X(\lambda; t) dg(\lambda; 0) X^*(\lambda; t),$$

где  $X(\lambda; t)$  - решение уравнения

$$\dot{X}(\lambda; t) = \frac{1}{2} J \left( \lambda I - \begin{pmatrix} b_{-1}(t) & 2a_{-1}(t) \\ 2a_{-1}(t) & b_0(t) \end{pmatrix} \right) X(\lambda; t)$$

[page 21]

ищется в виде  $X(\lambda; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n X_{nk} \lambda^k \right) t^n$ . Обозначим

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_{00} & & & \\ X_{10} & X_{11} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n0} & \dots & \dots & X_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \left( S_{j+k+1}(\vartheta) \right)_{j,k=0}^{\infty},$$

где  $(S_n(\vartheta))_{n=0}^{\infty}$  — последовательность моментов матричной меры  $d\varrho(\lambda; 0)$ . Тогда для элементов  $\mathcal{X}$  справедливы рекуррентные соотношения

$$2(n+1)J X_{n+1,k} = X_{n,k+1} + \sum_{j=k}^n \sum_{s=0}^{n-j} \left( \frac{3}{2} J(\mathcal{X} \mathcal{S} \mathcal{X}^*) \right)_{S, n-j-s} - \\ - \frac{1}{2} (\mathcal{X} \mathcal{S} \mathcal{X}^*)_{S, n-j-s} J) X_{jk}.$$

Основные результаты диссертации докладывались на XI (Миасс, 1986 г.) и XIV (Новгород, 1989 г.) Всесоюзных школах по теории операторов в функциональных пространствах; конференции "Гипергруппы и смежные вопросы" (Киев, 1986 г.); международной конференции "Нелинейный мир" (Киев, 1989 г.) и опубликованы в работах [ 6 , 7 , 11-13 ]

# Г Л А В А    I

## ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### § I.I. Необходимые сведения спектральной теории якобиевых матриц

I. Операторные якобиевы матрицы. Пусть  $H$  - гильбертово пространство,  $\mathcal{L}(H)$  - совокупность ограниченных операторов  $H$ . Рассмотрим разностное выражение с коэффициентами из  $\mathcal{L}(H)$

$$(\mathcal{L}u)_n = A_{n-1}u_{n-1} + B_n u_n + A_n u_{n+1} \quad (I.I.I)$$

$$(A_n > 0, B_n = B_n^*, n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}, A_{-1} = 0),$$

действующее на последовательности  $u = (u_n)_{n=0}^\infty$  векторов  $u_n$  из  $H$ . При подсчете  $(\mathcal{L}u)_0$  предполагается, что  $u_{-1} = 0$ . Это соотношение играет роль граничного условия.

В пространстве

$$H_0 = \ell_2(H; [0, \infty)) = \{u = (u_n)_{n=0}^\infty \mid u_n \in H, \sum_{k=0}^\infty \|u_k\|_H^2 < \infty\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_{H_0} = \sum_{n=0}^\infty (u_n, v_n)_H$$

можно построить эрмитов оператор  $L'$ , положив на финитных последовательностях  $u$  из  $H_0$   $(L'u)_n = (\mathcal{L}u)_n$ . Замыканием  $L'$  является эрмитов, но, вообще говоря, не самосопряженный оператор  $L$ . Задание  $L$  эквивалентно заданию якобиевой матрицы с операторными коэффициентами

$$\begin{pmatrix} B_0 & A_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_0 & B_1 & A_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & A_1 & B_2 & A_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (I.I.2)$$

Оператор  $L$  является ограниченным тогда и только тогда, когда его коэффициенты  $A_n, B_n$  ограничены по норме в совокупности,

т.е.  $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (\|A_n\|, \|B_n\|) < \infty$ .

По аналогии с (I.I.I) можно определить действие  $\mathcal{L}$  на последовательности  $(u_n)_{n=0}^\infty$  операторов из  $\mathcal{L}(H)$  (при этом считается, что  $u_{-1} = 0$ ). Пусть  $p(z) = (p_1(z), p_0(z), \dots)$  - решение задачи Коши  $(\mathcal{L}u)_n = zu_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ;  $u_{-1} = 0, u_0 = 1, z \in \mathbb{C}'$ ).  $p_n(z)$  является операторным полиномом степени  $n$  с обратным старшим коэффициентом равным  $A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1}$  (например,  $p_1(z) = A_0^{-1}(z1 - B_0)$ ).

Для финитных последовательностей  $u = (u_n)_{n=0}^\infty, u_n \in \mathcal{L}(H)$  можно ввести "преобразование Фурье"

$$u \mapsto \tilde{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^*(\bar{z}) u_n. \quad (I.I.3)$$

Пусть  $E(\lambda)$  - разложение единицы (обычное или обобщенное), отвечающее оператору  $L$ . На  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$  борелевских множеств на оси по  $E(\lambda)$  строится операторная спектральная мера  $\rho$  следующим образом

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \alpha \mapsto \rho(\alpha) = \delta_0^* E_\alpha \delta_0 \quad (I.I.4)$$

где  $\delta_0$  - оператор, действующий из  $H$  в  $\ell_2(H; [0, \infty))$  и ставящий вектору  $x \in H$  в соответствии последовательность  $(x, 0, 0, \dots) \in \ell_2(H; [0, \infty))$ . Мера  $\rho$  имеет слабо ограниченную вариацию, все интегралы

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |l^m|(d\rho(\lambda)x, y)_H| \quad (x, y \in H, m \in \mathbb{Z}_+) \quad (I.I.5)$$

для нее сходится и, кроме того, выполняется условие

$$\sum_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) = 1 \quad (I.I.6)$$

Если оператор  $L$  ограничен, то мера  $\rho$  имеет компактный носитель. Справедлива

Теорема I.I.I. ([5]) Полиномы  $P_n(\lambda)$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) образуют псевдоортонормированную систему относительно меры  $\rho(\lambda)$ , т.е.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda) d\rho(\lambda) P_m^*(\lambda) = \delta_{mn} 1 \quad (I.I.7)$$

Для финитных последовательностей  $u = (u_n)_{n=0}^{\infty}$ ,  $u_n \in \mathcal{L}(H)$  и такой же  $v$  выполняется равенство Парсеваля

$$\{u, v\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^* v_n = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^*(\lambda) d\rho(\lambda) \tilde{v}(\lambda) \quad (I.I.8)$$

(Оператор  $\{u, v\}$  — так называемое псевдоскалярное произведение  $u$  и  $v$ . При помощи предельного перехода равенство (I.I.8) распространяется и на нефинитные  $u$ , для которых  $\{u, u\}$  существует как ограниченный оператор.)

Таким образом, каждой якобиевой матрице с операторными коэффициентами  $L$  ставится в соответствие операторная спектральная мера, заданная на борелевских подмножествах действительной оси для которой справедливо равенство Парсеваля (I.I.8). Справедлива и обратная

Теорема I.I.2. ([5]) Пусть  $d\rho(\lambda)$  — неотрицательная операторная мера на оси  $\mathbb{R}^1$ , для которой существуют интегралы (I.I.5) и выполняется условие (I.I.6). Требуется также, чтобы интеграл

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P^*(\lambda) d\rho(\lambda) P(\lambda)$$

был обратимым оператором при любом операторном полиноме  $P(\lambda)$ , старший коэффициент которого равен 1.

Тогда  $d\rho(\lambda)$  является спектральной мерой некоторой якобиевой матрицы (I.I.2), коэффициенты которой определяются по  $d\rho(\lambda)$  при помощи формул

$$A_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda) d\rho(\lambda) P_{n+1}^*(\lambda), B_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda) d\rho(\lambda) P_n^*(\lambda) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (\text{I.I.9})$$

где  $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_n(\lambda), \dots$  - система полиномов, построенная посредством псевдоортогонализации степеней  $1, \lambda^1, \lambda^2, \dots$  относительно меры  $d\rho(\lambda)$

Опишем процедуру псевдоортогонализации, являющуюся обобщением ортогонализации Грамма-Шмидта. При этом  $P_0(\lambda)$  полагают равным 1, далее рассматривается полином  $S_1(\lambda) = \lambda 1 + P_{10} P_0(\lambda)$ , где  $P_{10}$  определяется из условия  $\int_{-\infty}^{\infty} P_0(\lambda) d\rho(\lambda) S_1^*(\lambda) = 0$

Тогда  $P_1(\lambda) = N_1^{-\frac{1}{2}} S_1(\lambda)$  где  $N_1 = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\lambda) d\rho(\lambda) S_1^*(\lambda)$

Продолжая эту процедуру, определим  $N_2, \dots, N_{n-1}$  и полиномы  $P_2(\lambda), \dots, P_{n-1}(\lambda)$ . Для полинома  $S_n(\lambda) = N_{n-1}^{-\frac{1}{2}} N_{n-2}^{-\frac{1}{2}} \lambda^n + P_{n,n-1} P_{n-1}(\lambda) + \dots + P_{n0} P_0(\lambda)$  операторные коэффициенты определяются из условий  $\int_{-\infty}^{\infty} P_k(\lambda) d\rho(\lambda) S_n^*(\lambda) = 0 \quad (k=0, \dots, n-1)$ .

Обозначив  $N_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\lambda) d\rho(\lambda) S_n^*(\lambda)$ , получим  $P_n(\lambda) = N_n^{-\frac{1}{2}} S_n(\lambda)$ . Таким образом, построена псевдоортонормирован-



ная относительно меры  $d\rho(\lambda)$  последовательность полиномов  $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots$ . Из процедуры псевдоортогонализации и формул (I.I.9) следует, что для  $A_n$ , восстановленных по  $d\rho(\lambda)$ , выполняются соотношения

$$A_n = N_{n+1}^{\frac{1}{2}} (n \in \mathbb{Z}_+). \quad (\text{I.I.I0})$$

Рассмотрим теперь резольвенту  $R_z(L) = R_z$  оператора  $L (z \in \mathbb{C}^1)$ . Она может быть представлена как матрица с операторнозначными элементами из  $L(H)$ :

$$R_z(L) = (R_{z;jk})_{j,k=0}^{\infty}, \quad R_{z;jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} P_j(\lambda) d\rho(\lambda) P_k^*(\lambda) = \delta_j^* R_z \delta_k, \quad (\text{I.I.II})$$

где  $\delta_k$  - оператор из  $H$  в  $\ell_2(H; [0, \infty))$ :

$$H \ni x \mapsto \delta_k x = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, x, 0, 0, \dots) \in \ell_2(H; [0, \infty)) \\ (j, k \in \mathbb{Z}_+, z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1).$$

Операторнозначная функция

$$m(z) = R_{z;00} = \delta_0^* R_z \delta_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\rho(\lambda) \quad (\text{I.I.I2})$$

называется функцией Вейля оператора  $L$ . Для нее справедливо представление в виде ряда по степеням  $z^{-1}$ :

$$m(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} S_n,$$

где операторы

$$S_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\rho(\lambda) = \delta_0^* L^n \delta_0 \quad (\text{I.I.I3})$$

называются моментами меры  $d\rho(\lambda)$ . (Отметим, что  $S_0 = 1$ .)

Пусть  $q(z) = (Q_0(z), Q_1(z), \dots)$  - решение уравнения  $(Lu)_n = zu_n (n \in \mathbb{N}, u = (u_n)_{n=0}^{\infty}, u_n \in \mathcal{L}(H), u_0 = 0, u_1 = A_0^{-1})$ .

**Теорема I.I.3.** ([5]) Существует по крайней мере одна операторная функция  $F(z)$  такая, что при каждом неевклидовом  $z$  для последовательности  $U(z) = (Q_n(z) + P_n(z)F(z))_{n=0}^{\infty}$  псевдоскалярное произведение  $\{U(z), U(z)\}$  определено как ограниченный оператор. Если оператор  $L$  - самосопряженный, то такая операторная функция единственна и совпадает с  $m(z)$ .

2. Классические полубесконечные якобиевы матрицы. В случае, когда  $H = \mathbb{C}^1$ ,  $\ell_2(H, [0, \infty)) = \ell_2$ ,  $A_n = a_n > 0$ ,  $B_n = b_n \in \mathbb{R}^1$  при  $n \in \mathbb{Z}_+$ , оператор (I.I.2) превращается в классическую якобиеву матрицу. Спектральная теория для таких матриц подробно описана в книгах [ ]. Спектральная мера  $dg(\lambda)$  якобиевой матрицы является скалярной вероятностной мерой с бесконечным числом точек роста на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ , а полиномы  $P_n(\lambda)$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) образуют ортонормированную последовательность относительно  $dg(\lambda)$ . Моменты  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  меры  $dg(\lambda)$  образуют положительно определенную последовательность, т.е.

$$D_n = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix} = \det(S_{j+k})_{j,k=0}^n > 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+; D_{-1} = 1) \quad (\text{I.I.14})$$

В скалярном случае коэффициенты  $a_n, b_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) якобиевой матрицы могут быть непосредственно восстановлены по моментам при помощи формул ([ ])

$$a_n = \frac{\sqrt{D_{n-1} D_{n+1}}}{D_n}, \quad b_n = \frac{\Delta_n}{D_n} - \frac{\Delta_{n-1}}{D_{n-1}} \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad (\text{I.I.15})$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} & S_{n+1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} & S_{2n+1} \end{vmatrix} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, \Delta_{-1} = 0, \Delta_0 = S_1).$$

В § 2 этой главы будет получен аналог формул (I.I.I5) для разностных выражений с операторными коэффициентами.

3. Конечные якобиевы матрицы. В этом пункте излагаются необходимые сведения о конечных разностных выражениях:

$$(\mathcal{L}u)_n = a_{n-1}u_{n-1} + b_n u_n + a_n u_{n+1}$$

$$(u = (u_n)_{n=0}^N \in \mathbb{C}^{N+1}, a_n \geq 0, b_n \in \mathbb{R}^1, n=0, 1, \dots, N; u_{-1} = u_{N+1} = 0)$$

или, что эквивалентно, конечных якобиевых матриц  $L$  из  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{N+1})$  вида

$$\begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \\ 0 & a_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & a_{N-1} & b_N & a_{N-1} \end{pmatrix} \quad (\text{I.I.I6})$$

Обобщение этих фактов на случай конечных разностных выражений с операторными коэффициентами будет использоваться при интегрировании конечных неабелевых цепочек нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

Рассмотрим решение  $(P_{-1}(\lambda), \dots, P_N(\lambda))$  уравнения  $(\mathcal{L}u)_n = \lambda u_n$  ( $n=0, 1, \dots, N-1; u_{-1}=0, u_N=1$ ) и положим

$$P_{N+1}(\lambda) = (\lambda - b_N)P_N(\lambda) - a_{N-1}P_{N-1}(\lambda)$$

Тогда  $P_{N+1}(\lambda)$  - полином  $(N+1)$ -й степени, корни которого

различны и являются точками спектра матрицы  $L$ :

[page 29]

$$P_{N+1}(\lambda) = a_0^{-1} \dots a_{N-1}^{-1} (\lambda - \lambda_0) \dots (\lambda - \lambda_N) = a_0^{-1} \dots a_{N-1}^{-1} \det(L - \lambda I).$$

Спектральная мера  $d\rho(\lambda)$  матрицы  $L$  сосредоточена в точках  $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ , причем

$$\rho_j = \rho(\lambda_j) = \left( \sum_{k=0}^N P_k^2(\lambda_j) \right)^{-1} \quad (j=0, 1, \dots, N).$$

Соответствующая функция Вейля  $m(z)$  будет в данном случае рациональной функцией

$$m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z} = \sum_{j=0}^N \frac{1}{(\lambda_j - z) \sum_{k=0}^N P_k^2(\lambda_j)}.$$

Формулы (I.I.15) для  $a_n, b_n (n=0, 1, \dots, N)$  справедливы и в случае конечных якобиевых матриц. Отметим, что моменты  $S_n$  в этом случае определяются по формулам

$$S_n = \sum_{j=0}^N \rho_j \lambda_j^n, \quad (\text{I.I.17})$$

и что при  $n \geq N+1$  определители  $D_n$  из (I.I.14) равны нулю.

4. Разностные операторы на оси. Пусть  $\ell_2((-\infty, \infty))$  - гильбертово пространство последовательностей  $u = (u_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ ,

$u_n \in \mathbb{C}^1$  таких, что  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$  со скалярным произведением  $(u, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \bar{v}_n$ . Рассмотрим разностное выражение

$$\begin{aligned} (Tu)_n &= a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n + a_n u_{n+1} \\ (n \in \mathbb{Z}, a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}^1) \end{aligned} \quad (\text{I.I.18})$$

и порожденный эрмитов оператор  $L'$ . При помощи описанного в [ ] метода удвоения оператор  $L'$  может быть приведен к операторной якобиевой матрице вида (I.I.2). Для этого установим изометрию  $\mathcal{U}$  между пространствами  $\ell_2((-\infty, \infty))$  и  $\ell_2(\mathbb{C}^2, [0, \infty))$

следующим образом:

$$\ell_2((-\infty, \infty)) \ni u = (u_n)_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow{U} (\tilde{u}_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{C}^2, [0, \infty)),$$

где  $\tilde{u}_n = (u_{-n-1}, u_n) \in \mathbb{C}^2$ . При этом оператор  $L'$  перейдет в унитарно эквивалентный ему оператор  $L$ , действующий в  $\ell_2(\mathbb{C}^2; [0, \infty))$

$$(L\tilde{u}_n) = A_{n-1}\tilde{u}_{n+1} + B_n\tilde{u}_n + A_n\tilde{u}_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, \tilde{u}_{-1} = 0),$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{-n-2} & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} (n \in \mathbb{Z}_+), B_n = \begin{pmatrix} b_{-n-1} & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix} (n \in \mathbb{N}), \quad (I.I.19)$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}.$$

Как и в п. I оператору  $L$  ставится в соответствие неотрицательная спектральная мера  $dg(\lambda)$  со значениями в  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ , для которой существуют интегралы (I.I.5) и выполняется соотношение (I.I.6). Как было сказано в п. I, по всякой мере, удовлетворяющей таким свойствам можно при помощи процедуры псевдоортогонализации однозначно восстановить операторную якобиеву матрицу с коэффициентами  $A_n > 0$ ,  $B_n = B_n^*$  из  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ , однако при решении обратной задачи для разностного оператора на всей оси возникает вопрос, каким дополнительным условиям должна удовлетворять мера  $dg(\lambda)$  для того, чтобы полученные операторы  $A_n, B_n$  имели специальный вид (I.I.19). Ответ на этот вопрос дает

Теорема I.I.4. ([13]) Пусть  $g(\Delta) = (g_{\alpha, \beta}(\Delta))_{\alpha, \beta = -1, 0}$  —

положительно определенная матричная мера, заданная на борелевских подмножествах действительной оси, такая что существуют

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^k d\rho(\lambda) \quad (k \in \mathbb{Z}_+) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы она являлась спектральной мерой разностного оператора на оси, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\rho_{0,-1}(\lambda) = \alpha > 0;$$

$$2) \quad \text{для функций} \quad M_{\alpha,\beta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\rho_{\alpha,\beta}(\lambda) \quad (\alpha, \beta = -1, 0)$$

в верхней полуплоскости справедливо тождество

$$-\alpha (M_{0,0}(z) M_{-1,-1}(z) - M_{0,-1}^2(z)) \equiv M_{0,-1}(z); \quad (I.I.20)$$

$$3) \quad \text{функции} \quad m_1(z) = -\frac{M_{0,1}(z)}{\alpha M_{0,0}(z)}, \quad m_2(z) = -\frac{M_{0,-1}(z)}{\alpha M_{-1,-1}(z)}$$

не являются рациональными от переменной  $z$ .

## § 1.2. Аналог прямой и обратной спектральной задачи для несимметричных разностных выражений с операторными коэффициентами

В этом параграфе будут рассмотрены несимметричные разностные выражения с операторными коэффициентами, действующие на последовательности векторов из некоторого банахова пространства. Следуя [21] мы введем в п.1 обобщенную спектральную функцию для таких выражений на полуоси, являющуюся аналогом обобщенной спектральной функции для самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля (см. [27, 31]). Помимо описания процедуры решения обратной задачи, будут получены формулы для коэффициентов разностного выражения, обобщающие формулы (I.1.15). В п. 2 рассматриваются конечные разностные выражения. В п. 3 для разностных выражений на всей оси будет получен аналог теоремы I.1.4.

I. Разностные выражения на полуоси. Пусть  $H$  - банахово пространство,  $\mathcal{L}(H)$  - пространство линейных ограниченных операторов в  $H$ . Рассмотрим разностное выражение, действующее на последовательности  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  векторов из  $H$  следующим образом

$$(Lu)_n = A_{n-1}u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} \quad (u_{-1} = 0, n \in \mathbb{Z}_+), \quad (I.2.1)$$

где  $A_n, B_n, C_n \in \mathcal{L}(H)$ , причем операторы  $A_n, C_n$  обратимы при  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $A_{-1} = C_{-1} = 0$

Обозначим через  $P(H)$  пространство полиномов от комплексной переменной  $\lambda$  с коэффициентами из  $\mathcal{L}(H)$ . Для произвольного  $\lambda \in \mathbb{C}^1$  рассмотрим две последовательности  $P_n(\lambda), P_n^+(\lambda)$  полиномов из  $P(H)$ , определенные условиями

$$\begin{aligned}
 P_{-1}(\lambda) &= P_{-1}^+(\lambda) = 0, \quad P_0(\lambda) = P_0^+(\lambda) = 1, \\
 A_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + B_n P_n(\lambda) + C_n P_{n+1}(\lambda) &= \lambda P_n(\lambda), \\
 P_{n-1}^+(\lambda) C_{n-1} + P_n^+(\lambda) B_n + P_{n+1}^+(\lambda) A_n &= \lambda P_n^+(\lambda) \quad (n \in \mathbb{Z}_+).
 \end{aligned} \tag{I.2.2}$$

Очевидно, что  $P_n(\lambda), P_n^+(\lambda)$  являются полиномами от  $\lambda$  степени  $n$  со старшими коэффициентами соответственно  $C_{n-1}^{-1} \dots C_0^{-1}$  и  $A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Лемма I.2.1. Пусть  $(L^n)_{jk}$  — это коэффициент при  $\lambda^k$  в выражении  $(L^n)_j$  ( $n \in \mathbb{N}; j, k \in \mathbb{Z}_+$ ),  $(L^0)_{jk} = \delta_{jk} 1$ .

Тогда

$$\lambda^n 1 = \sum_{k=0}^n (L^n)_{0k} P_k(\lambda), \quad \lambda^m 1 = \sum_{k=0}^m P_k^+(\lambda) (L^m)_{k0} \quad (I.2.3)$$

$(n, m \in \mathbb{Z}_+).$

Доказательство. Докажем первое из равенств (I.2.3). Второе проверяется аналогично. Из (I.2.2) следует, что

$$\lambda 1 = \lambda P_0(\lambda) = B_0 P_0(\lambda) + C_0 P_1(\lambda) = (L^0)_{00} P_0(\lambda) + (L^0)_{01} P_1(\lambda).$$

Предположим, что (I.2.3) выполняется при  $\ell \leq n$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 \lambda^{n+1} 1 &= \sum_{k=0}^n (L^n)_{0k} \lambda P_k(\lambda) = \sum_{k=0}^n (L^n)_{0k} (A_{k-1} P_{k-1}(\lambda) + B_k P_k(\lambda) + \\
 &+ C_k P_{k+1}(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n+1} [(L^n)_{0k-1} L_{k-1k} + (L^n)_{0k} L_{kk} + (L^n)_{0k+1} L_{kk+1}] \cdot \\
 &\cdot P_k(\lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} (L^{n+1})_{0k} P_k(\lambda). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Из леммы I.2.1 следует, что любые полиномы  $R(\lambda), Q(\lambda)$  из  $\mathcal{P}(\mathbb{H})$  могут быть однозначно представлены в виде

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k P_k(\lambda), \quad Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^+(\lambda) Q_k \quad (R_k, Q_k \in \mathcal{L}(\mathbb{H})).$$



Зададим билинейное отображение  $R: P(H) \times P(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$  [page 34]

$$R(R(\lambda), G(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k G_k \quad (R(\lambda), G(\lambda) \in P(H)) \quad (I.2.4)$$

Очевидно, что выполняется свойство "ортогональности"

$$R(P_n(\lambda), P_m^+(\lambda)) = \delta_{nm} 1 \quad (n, m \in \mathbb{Z}_+). \quad (I.2.5)$$

и что для любых  $R(\lambda), G(\lambda) \in P(H); T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$

$$R(T_1 R(\lambda), G(\lambda) T_2) = T_1 R(R(\lambda), G(\lambda)) T_2. \quad (I.2.6)$$

Кроме того, из леммы I.2.1 следует, что для любых  $n, m \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} R(\lambda^n 1, \lambda^m 1) &= \sum_{k=0}^{\min(m, n)} (L^n)_{0k} (L^m)_{kv} = (L^{n+m})_{00} = \\ &= R(\lambda^{n+m} 1, 1) = S_{n+m} \end{aligned} \quad (I.2.7)$$

Определение I.2.1. Мы назовем отображение  $R$ , определенное формулой (I.2.4) обобщенной спектральной функцией разностного выражения (I.2.1), а последовательность операторов  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  — последовательность моментов, соответствующей (I.2.1).

В силу (I.2.7) для любых  $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} R_{nk} \lambda^k, G_m(\lambda) = \sum_{j=0}^m G_{mj} \lambda^j \in P(H)$

$$R(R(\lambda), G(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m R_{nk} S_{k+j} G_{mj} \quad (I.2.8)$$

Определение I.2.2. Последовательность  $(S_n | S_n \in \mathcal{L}(H))_{n=0}^{\infty}$

называется невырожденной, если для любого  $n \in \mathbb{Z}_+$  оператор-матрица  $(S_{j+k})_{j,k=0}^n$  является обратимым оператором в пространстве  $\underbrace{H \oplus \dots \oplus H}_{n+1}$ .

**Теорема I.2.I.** Для того, чтобы билинейное отображение  $R: P(H) \times P(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ , удовлетворяющее (I.2.6), являлось обобщенной спектральной функцией некоторого разностного выражения вида (I.2.I) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1.  $R(1, 1) = 1$ ;
2.  $R(\lambda^n 1, \lambda 1) = R(\lambda^{n+m} 1, 1) = S_{n+m} \forall m, n \in \mathbb{Z}_+$ ;
3. Последовательность моментов  $(S_n)_{n=0}^\infty$  невырождена.

**Доказательство.** Необходимость. Если  $R$  — обобщенная спектральная функция разностного выражения (I.2.I), то в силу (I.2.5)  $R(1, 1) = R(P_0(\lambda), P_0^+(\lambda)) = 1$  и, кроме того, выполняется (I.2.7). Поэтому для доказательства необходимости нам осталось проверить невырожденность последовательности  $(S_n)_{n=0}^\infty$ .

Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{k=0}^n S_{j+k} X_{nk} = Z_j \quad (X_{nk}, Z_j \in \mathcal{L}(H); j, k = 0, \dots, n). \quad (I.2.9)$$

Пусть  $X(\lambda) = \sum_{k=0}^n X_{nk} \lambda^k$ . Тогда из (I.2.8) следует, что

$R(\lambda^j 1, X(\lambda)) = \sum_{k=0}^n S_{j+k} X_{nk} \quad (j = 0, \dots, n)$  т.е. решением системы (I.2.9) являются коэффициенты многочлена  $X(\lambda)$  такого, что  $R(\lambda^j 1, X(\lambda)) = Z_j \quad (j = 0, \dots, n)$ . Используя (I.2.3) и разложение  $X(\lambda) = \sum_{k=0}^n X_k P_k(\lambda)$ , мы получим систему, эквивалентную (I.2.9):

$$\sum_{k=0}^j (L^j)_{0k} X_k = Z_j \quad (j = 0, \dots, n).$$

Матрица коэффициентов этой системы нижнетреугольна, причем по диагонали стоят обратимые операторы  $(L^j)_{0j} = C_j$ . Поэтому для любых  $Z_j$  решения системы существует и единственно, а значит, и система (I.2.9) однозначно разрешима. Отсюда следует, что опера-

тор  $\|S_{j+k}\|_{j,k=0}^n$  однозначно отображает  $\underbrace{H \oplus \dots \oplus H}_{n+1}$  на се-

бя и, следовательно, по теореме Банаха о гомеоморфизме, обратим.

Достаточность. Пусть теперь отображение  $R$  удовлетворяет условиям I-3. Покажем сначала, что для любого многочлена  $R_n(\lambda)$  степени  $n$  со старшим коэффициентом 1 найдется многочлен  $Q_n(\lambda)$  степени  $n$  такой, что  $R(R_n(\lambda), Q_n(\lambda)) = 1$ . Действительно, из (I.2.8) следует, что в качестве  $Q_n(\lambda)$  можно выбрать многочлен  $\sum_{k=0}^n X_{nk} \lambda^k$ , где  $(X_k)_{k=0}^n$  - решение системы

$$\sum_{k=0}^n S_{j+k} X_k = \delta_{jn} 1 \quad (j=0, \dots, n),$$

которое существует и единственно, благодаря невырожденности  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ .

Построим теперь системы полиномов  $P_n(\lambda), P_n^+(\lambda) (n \in \mathbb{Z}_+)$ ,

для которых выполняются соотношения ортогональности

$$R(P_n(\lambda), P_m^+(\lambda)) = \delta_{nm} 1. \text{ Пусть } P_1(\lambda) = P_0^+(\lambda) = 1.$$

Тогда  $R(P_0(\lambda), P_0^+(\lambda)) = 1$ . Положим  $P_1(\lambda) = \lambda 1 -$

$$- R(\lambda 1, P_0^+(\lambda)), \quad P_1' = \lambda 1 - R(P_0(\lambda), \lambda 1).$$

Очевидно,  $R(P_1(\lambda), P_0^+(\lambda)) = R(P_1(\lambda), P_1'(\lambda)) = 0$ .

Если бы оператор  $N_1 = R(P_1(\lambda), P_1'(\lambda))$  был необратим, что для любого

полинома первой степени  $Q_1(\lambda) = \lambda X_{11} + X_{10} = P_1'(\lambda) X_1 + X_0$

был бы необратим оператор  $R(P_1(\lambda), Q_1(\lambda)) = N_1 C^1$ , что противоречит невырожденности последовательности моментов  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ .

Поэтому,  $N_1$  - обратим и мы можем выбрать

Аналогично, если построены  $P_k(\lambda), P_k^+(\lambda), k=0, \dots, n$ , то  $P_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} - \sum_{k=0}^n R(\lambda^{n+1}, P_{n-k}^+(\lambda)) P_{n-k}(\lambda),$

$$P_{n+1}'(\lambda) = \lambda^{n+1} N_1^{-1} \dots N_n^{-1} - \sum_{k=0}^n P_{n-k}^+(\lambda) R(P_{n-k}(\lambda), \lambda^{n+1} 1)$$

и те же рассуждения показывают, что

[page 37]

$$R(P_{n+1}(\lambda), P_k^+(\lambda)) = R(P_k(\lambda), P_{n+1}^+(\lambda)) = 0 \quad (k=0, \dots, n)$$

и оператор  $N_{n+1} = R(P_{n+1}(\lambda), P_{n+1}^+(\lambda))$  обратим, так что

$$P_{n+1}^+(\lambda) = P_{n+1}'(\lambda) N_{n+1}^{-1}. \text{ Так как } R(\lambda P_n(\lambda), P_m^+(\lambda)) = \\ = R(P_n(\lambda), \lambda P_m^+(\lambda)) = 0 \text{ при } |n-m| \geq 2. \text{ то}$$

$$\lambda P_n(\lambda) = R(\lambda P_n(\lambda), P_{n-1}^+(\lambda)) P_{n-1}(\lambda) + R(\lambda P_n(\lambda), P_n^+(\lambda)) P_n(\lambda) + \\ + R(\lambda P_n(\lambda), P_{n+1}^+(\lambda))$$

$$(n \in \mathbb{Z}_+, P_{-1}(\lambda) = P_{-1}^+(\lambda) = 0).$$

Поскольку старший коэффициент  $P_n(\lambda)$  равен 1, многочлен

$$\lambda P_n(\lambda) \text{ имеет вид } \lambda P_n(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + \sum_{k=0}^n C_k \lambda^k,$$

$$\text{так что } R(\lambda P_n(\lambda), P_{n+1}^+(\lambda)) = C_n = 1 \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Положим

$$A_n = R(\lambda P_{n+1}(\lambda), P_n^+(\lambda)), B_n = R(\lambda P_n(\lambda), P_n^+(\lambda)) \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Тогда, очевидно, выполняются рекуррентные соотношения (I.2.2) и,

следовательно,  $R$  является обобщенной спектральной функцией

разностного выражения (I.2.1) с коэффициентами  $A_n, B_n, C_n = 1$ .

При этом

$$A_n = N_{n+1} \quad (\text{I.2.I0})$$

Теорема доказана. ■

Из доказательства достаточности условий теоремы I.2.1 следует, что разностное выражение (I.2.1) восстанавливается по обобщенной спектральной функции неоднозначно — мы произвольным образом выбрали старшие коэффициенты многочленов  $P_n(\lambda)$  равными единице, в результате чего разностное выражение, восстановленное по  $R$  приняло вид:

$$(Lu)_n = A_{n-1}u_{n-1} + B_n u_n + u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, u_{-1} = 0). \quad (I.2.II)$$

Всякое разностное выражение (I.2.I) может быть приведено к виду

(I.2.II) преобразованием подобия  $L \mapsto L' = VL V^{-1}$ , где

$(Vu)_n = V_n u_n \quad (n \in \mathbb{Z}_+, V_n \in \mathcal{L}(H))$ . Действительно, пусть

$$V_0 = 1, V_n = C_0 \dots C_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (I.2.I2)$$

Тогда  $(L'u)_n = (VL V^{-1}u)_n = V_n(A_{n-1}V_{n-1}^{-1}u_{n-1} +$

$$+ B_n V_n^{-1}u_n + C_n V_{n+1}^{-1}u_{n+1}) = C_0 \dots C_{n-1} A_{n-1} C_{n-2}^{-1} \dots C_0^{-1} u_{n-1} +$$

$$(I.2.I3)$$

$$+ C_0 \dots C_{n-1} B_n C_{n-1}^{-1} \dots C_0^{-1} u_n + u_{n+1}.$$

При этом  $(L^n)_{00} = (VL^n V^{-1})_{00} = (L^n)_{00} = R(\lambda^n 1, 1) = S_n$ ,

т.е. разностным выражениям  $L$  и  $L'$  отвечает одна и та же обобщенная спектральная функция. Отсюда и из теоремы I.2.I следует

**Теорема I.2.2.** Между отображениями  $R$ , удовлетворяющими условиям теоремы I.2.I и разностными выражениями  $L$  вида (I.2.II) существует взаимнооднозначное соответствие, которое задается формулами

$$R(\lambda^n 1, 1) = S_n = (L^n)_{00} \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad (I.2.I4)$$

$$A_m = R(\lambda P_{m+1}(\lambda), P_m^+(\lambda)), B_m = R(\lambda P_m(\lambda), P_m^+(\lambda)) \quad (m \in \mathbb{Z}_+),$$

где  $P_m(\lambda), P_m^+(\lambda) \quad (m \in \mathbb{Z}_+)$  построены по  $R$  при помощи процедуры псевдоортогонализации.

Из (I.2.I3) следует, что если мы располагаем дополнительной информацией о коэффициентах (I.2.I), позволяющей определить по произведению  $C_n A_n$  операторы  $C_n$  и  $A_n$ , то знание обоб-

ценной спектральной функции  $R$  позволяет однозначно восстано-39] вить разностное выражение (I.2.I). Так, в случае операторных якобиевых матриц (I.I.2)  $C_n A_n = A_n^2$  и положительный оператор  $A_n$  однозначно восстанавливается по своему квадрату.

В п. 2 § I.I были приведены формулы, выражающие коэффициенты классической якобиевой матрицы через моменты спектральной меры. Оказывается, что для разностного выражения (I.2.II) также существуют рекуррентные формулы, позволяющие восстановить его коэффициенты по последовательности моментов  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ .

Для фиксированного натурального  $m$  рассмотрим вместо разностного выражения (I.2.I) "сдвинутое" разностное выражение

$$(L_m u)_n = A_{n+m-1} u_{n-1} + B_{n+m} u_n + C_{n+m} u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}, u_{-1} = 0) \quad (I.2.I5)$$

Пусть  $S^{(m)} = (S_n^{(m)})_{n=0}^{\infty}$  - последовательность моментов, отвечающая разностному выражению (I.2.I5) ( $S^{(0)} = S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$ ).

Следующие леммы указывают связь между последовательностями  $S^{(m)}$  и  $S^{(m+1)}$

### Лемма I.2.2.

$$S_{n+2}^{(m)} = S_{n+1}^{(m)} S_1^{(m)} + \sum_{p=0}^n S_p^{(m)} C_m \cdot S_{n-p}^{(m+1)} A_m \quad (m, n \in \mathbb{Z}_+) \quad (I.2.I6)$$

Доказательство. Как следует из леммы I.2.I

$$S_{n+2}^{(m)} = (L_m^{n+2})_{00} = \sum_{I_{n+1}} (L_m)_{0i_1} (L_m)_{i_1 i_2} \dots (L_m)_{i_{n+1} 0}, \quad (I.2.I7)$$

где суммирование ведется по множеству  $I$  наборов  $(i_1, \dots, i_{n+1})$ , таких, что

- 1)  $i_k \geq 0, k = 1, \dots, n+1$ ;
- 2)  $i_1 \leq 1, i_{n+1} \leq 1$ ;
- 3)  $|i_k - i_{k+1}| \leq 1 \quad (k = 1, \dots, n)$ .

$$\bar{I}_{n+1,p} = \{(i_1, \dots, i_{n+1}) \in \bar{I}_{n+1} \mid i_p = 0, i_k > 0 \text{ при } p < k \leq n+1\} \quad (p=0, \dots, n+1).$$

Очевидно, что подмножества  $\bar{I}_{n+1,p}$  и  $\bar{I}_{n+1,q}$  не пересекаются при  $p \neq q$  и  $\bar{I}_{n+1} = \bigcup_{p=0}^{n+1} \bar{I}_{n+1,p}$ . Из определения  $\bar{I}_{n+1}$  и  $\bar{I}_{n+1,p}$  следует, что для каждого набора  $(i_1, \dots, i_{n+1}) \in \bar{I}_{n+1,p}$  при  $p \leq n$   $i_{p+1} = i_{n+1} = 1$ , поэтому

$$S_{n+2}^{(m)} = \left[ \sum_{p=0}^n \sum_{\bar{I}_{n+1,p}} (L_m)_{0i_1} \dots (L_m)_{i_{p-1}0} (L_m)_{01} (L_m)_{1i_{p+2}} \dots \right] \quad (I.I.I8)$$

$$\times (L_m)_{10} + \sum_{\bar{I}_{n+1,n+1}} (L_m)_{0i_1} \dots (L_m)_{i_n 0} (L_m)_{00}$$

Но из (I.I.I5) следует, что  $(L_m)_{01} = C_m$ ,  $(L_m)_{10} = A_m$ ,  $(L_m)_{00} = B_m = S_1^{(m)}$  и  $(L_m)_{jk} = (L_{m+1})_{j-1, k-1}$  ( $j, k \in \mathbb{N}$ ).

Поэтому (I.2.I8) можно переписать в виде

$$S_{n+2}^{(m)} = \left( \sum_{p=0}^n \sum_{\bar{I}_{n+1,p}} (L_m)_{0i_1} \dots (L_m)_{i_{p-1}0} C_m (L_{m+1})_{0, i_{p+2}-1} \dots \right) \times$$

$$\times (L_{m+1})_{i_n-1, 0} A_m + \sum_{\bar{I}_{n+1,n+1}} (L_m)_{0i_1} \dots (L_m)_{i_n 0} S_1^{(m)} =$$

$$= \sum_{p=0}^n \left( \sum_{\bar{I}_{p-1}} (L_m)_{0i_1} \dots (L_m)_{i_{p-1}0} C_m \sum_{\bar{I}_{n-p-1}} (L_{m+1})_{0i_1} \dots (L_{m+1})_{i_{n-p-1}0} \times \right.$$

$$\left. \times A_m + \sum_{\bar{I}_n} (L_m)_{0i_1} \dots (L_m)_{i_n 0} S_1^{(m)} \right).$$

Тогда из (I.2.I7) следует, что

$$S_{n+2}^{(m)} = S_{n+1}^{(m)} S_1^{(m)} + \sum_{p=0}^n S_p^{(m)} C_m S_{n-p}^{(m+1)} A_m. \quad \blacksquare$$

Замечание. Совершенно аналогично формуле (I.2.I6) можно показать формулу

$$S_{n+2}^{(m)} = S_1^{(m)} S_{n+1}^{(m)} + \sum_{p=0}^n C_m S_{n-p}^{(m+1)} A_m S_p^{(m)} \quad (m, n \in \mathbb{Z}_+). \quad (\text{I.2.I6})$$

Лемма I.2.3. Пусть

$$\mathcal{D}_n(S^{(m)}) = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n; i_1, \dots, i_k \geq 1} (-1)^{k+1} S_{i_1}^{(m)} \dots S_{i_k}^{(m)} \quad (n, m \in \mathbb{Z}_+, \mathcal{D}_0 = 1) \quad (\text{I.2.I9})$$

Тогда

$$S_n^{(m)} = C_m^{-1} \mathcal{D}_{n+2}(S^{(m)}) A_m^{-1}. \quad (\text{I.2.20})$$

Доказательство. Перепишем (I.2.I6) в виде

$$C_m S_n^{(m+1)} A_m = S_{n+2}^{(m)} - S_{n+1}^{(m)} S_1^{(m)} - \sum_{p=1}^n S_p^{(m)} C_m S_{n-p}^{(m+1)} A_m \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \quad (\text{I.2.2I})$$

Формулы (I.2.2I) являются рекуррентными соотношениями, которые вместе с равенством  $S_0^{(m+1)} = 1$ , позволяют выразить  $S_n^{(m+1)} \quad (n \in \mathbb{N})$  через  $S_n^{(m)} \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$ ,  $A_m$  и  $C_m$ .

По определению (I.2.I9)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n+2}(S^{(m)}) &= \sum_{i_1 + \dots + i_k = n+2; i_1, \dots, i_k \geq 1} (-1)^{k+1} S_{i_1}^{(m)} \dots S_{i_k}^{(m)} = S_{n+2}^{(m)} - \sum_{i_1=1}^{n+1} S_{i_1}^{(m)} \times \\ &\times \sum_{i_2 + \dots + i_k = n+2-i_1} (-1)^k S_{i_2}^{(m)} \dots S_{i_k}^{(m)} = S_{n+2}^{(m)} - \sum_{i_1=1}^{n+1} S_{i_1}^{(m)} \mathcal{D}_{n+2-i_1}(S^{(m)}) = \\ &= S_{n+2}^{(m)} - S_{n+1}^{(m)} S_1^{(m)} - \sum_{p=1}^n S_p^{(m)} \mathcal{D}_{n+2-p}(S^{(m)}). \end{aligned} \quad (\text{I.2.22})$$

Из (I.2.2I), (I.2.22) следует, что последовательности

$$\begin{aligned} (C_m S_n^{(m+1)} A_m)_{n=0}^\infty \quad \text{и} \quad (\mathcal{D}_{n+2}(S^{(m)}))_{n=0}^\infty \quad \text{удовлетворяют} \\ \text{одним и тем же рекуррентным соотношениям, причем} \quad \mathcal{D}_2(S^{(m)}) = \\ = S_2^{(m)} - (S_1^{(m)})^2 = (L_m)_{00} - (L_m)_{00}^2 = (L_m)_{01} (L_m)_{10} = C_m A_m = \\ = C_m S_0^{(m+1)} A_m. \end{aligned}$$



Отсюда следует, что  $\mathcal{D}_{n+2}(S^{(m)}) = C_m S_n^{(m+1)} A_m \ (n \in \mathbb{Z}_+)$ . ■

Рассмотрим теперь разностное выражение (I.2.II). Из (I.2.7) следует, что  $B_0 = (L^1)_{00} = S_1$ , а  $S_2 = (L^2)_{00} = (L)_{00}^2 + (L)_{01} \times (L)_{10} = B_0^2 + A_0$ , т.е.  $A_0 = S_2 - S_1^2$ . Аналогично, рассматривая  $L^{(m)}$ , мы получаем, что  $B_m = S_1^{(m)}$ ,  $A_m = S_2^{(m)} - (S_1^{(m)})^2$ .

Тогда из леммы I.2.3 следует следующая

Теорема I.2.3. Пусть  $(S_n)_{n=0}^\infty$  — последовательность моментов, отвечающая разностному выражению (I.2.II). Тогда справедливы рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} S_n^{(m+1)} &= \mathcal{D}_{n+2}(S^{(m)}) \mathcal{D}_2(S^{(m)})^{-1}, \\ B_m &= S_1^{(m)}, A_m = S_2^{(m)} - (S_1^{(m)})^2 \quad (n, m \in \mathbb{Z}_+), \end{aligned} \quad (\text{I.2.23})$$

где операторы  $\mathcal{D}_n(S^{(m)})$  определяются по формулам (I.2.I9).

В случае операторных якобиевых матриц (I.I.2) формулы (I.2.23) меняются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n^{(m+1)} &= \mathcal{D}_2(S^{(m)})^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D}_{n+2}(S^{(m)}) \mathcal{D}_2(S^{(m)})^{-\frac{1}{2}}, \\ B_m &= S_1^{(m)}, A_m = \mathcal{D}_2(S^{(m)})^{\frac{1}{2}} = (S_2^{(m)} - (S_1^{(m)})^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{I.2.24})$$

Это следует из леммы I.2.3 и равенств

$$S_2^{(m)} = B_m^2 + A_m^2 = (S_1^{(m)})^2 + A_m^2 \quad (m \in \mathbb{Z}_+).$$

В качестве иллюстрации покажем, как в скалярном случае  $A_n = a_n > 0$ ,  $B_n = b_n \in \mathbb{R}^1$  из формул (I.2.24) можно вывести классические формулы (I.I.I4), (I.I.I5) для коэффициентов полубесконечной якобиевой матрицы. Пусть  $S = (S_n)_{n=0}^\infty$  — соответствующая



шаге мы получим  $S_{k+j+1} \mapsto S_{k+j+1} - S_k S_{j+1} -$

$$- (S_{k+1} - S_k S_1) S_j - (S_{k+2} - S_{k+1} S_1 - S_k \mathcal{D}_2(S)) S_{j-1} - \dots -$$

$$- (S_{k+1} - S_{k+j-1} S_1 - \dots - S_k \mathcal{D}_j(S)) S_1 = S_{k+j+1} - S_{k+j} S_1 -$$

$$- S_{k+j-1} (S_2 - S_1^2) - S_{k+j-2} (S_3 - S_1 S_2 - \mathcal{D}_2(S) S_1) - \dots -$$

$$- S_k (S_{j+1} - S_1 S_j - \mathcal{D}_2(S) S_{j-1} - \dots - \mathcal{D}_j(S) S_1). \quad (\text{I.2.26})$$

Но, как следует из (I.2.22), для любого  $P \geq 1$

$$S_{P+1} - S_1 S_P - \mathcal{D}_2(S) S_{P-1} - \dots - \mathcal{D}_j(S) S_1 = \mathcal{D}_{P+1}(S),$$

поэтому (I.2.26) переписывается в виде

$$S_{k+j+1} - S_{k+j} S_1 - S_{k+j-1} \mathcal{D}_2(S) - \dots - S_k \mathcal{D}_{j+1}(S) = \\ = C_{k,j+1}. \quad (k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}_+) \quad (\text{I.2.27})$$

Таким образом, в результате преобразования столбцов мы получили равенство

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ S_1 & C_{11} & \dots & C_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n+1} & C_{n+1,1} & \dots & C_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = \det(C_{pq})_{p,q=1}^{n+1}$$

Отметим, что из (I.2.22) и (I.2.27) следует, что  $C_{1j} = S_{j+1} - S_j S_1 - \dots - S_1 \mathcal{D}_j(S) = \mathcal{D}_{j+1}(S)$  ( $j = 1, \dots, n+1$ ). Отнимем от второй строки полученного определителя первую, умноженную на  $S_1$ . Тогда элемент  $C_{2j}$  перейдет в  $C_{2j} - S_1 \mathcal{D}_{j+1}(S) = S_{j+2} - S_{j+1} S_1 - \dots - S_2 \mathcal{D}_j(S) - S_1 \mathcal{D}_{j+1}(S) = \mathcal{D}_{j+2}(S)$  ( $j = 1, \dots, n+1$ ).

Продолжая эту процедуру и отнимая на  $K$ -м шаге от  $(K+1)$ -й строки  $K$ -ю, умноженную на  $S_1$ ,  $(K-1)$ -ю, умноженную на  $S_2, \dots$ , первую, умноженную на  $S_K$ , мы получим строку  $(\Phi_{K+2}(S), \dots, \Phi_{K+n+2}(S))$ . Таким образом,  $\det(C_{pq})_{p,q=1}^{n+1} = \det(\Phi_{j+k+1})_{j,k=1}^{n+1} = D'$ , что и доказывает первое из равенств (I.2.25). Второе равенство теперь нетрудно доказать, если заметить, что

$$\Delta_{n+1} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ S_0 & S_1 & \dots & S_{n+1} & S_{n+2} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n+2} & S_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n+2} & S_{2n+3} \end{vmatrix}.$$

Проделав с определителем в правой части преобразования, описанные для  $D_{n+1}$ , получим

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 \\ \Phi_2(S) & \dots & \Phi_{n+2}(S) & \Phi_{n+3}(S) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{n+2}(S) & \dots & \Phi_{2n+2}(S) & \Phi_{2n+3}(S) \end{vmatrix} = \Delta'_n.$$

Теперь мы можем проверить справедливость формул (I.I.I5). Действительно, из (I.2.24)  $b_0 = S_1 = \frac{\Delta_0}{D_0} - \frac{\Delta_{-1}}{D_{-1}}$ ,  $a_0 = (S_2 - S_1^2)^{\frac{1}{2}} = (S_2 - 1 - S_1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{D_1} = \frac{\sqrt{D_{-1} D_1}}{D_0}$ . Пусть формулы (I.I.I5) выполняются для  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ . Тогда, рассматривая разностное выражение  $L_1$ , определенное в (I.2.I5) и используя формулы (I.2.24) для  $S_n^{(1)}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ), получим

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{D'_{n-1} \Phi_2(S)^{-n} D'_{n+1} \Phi_2(S)^{-(n+2)}}}{D'_n \Phi_2(S)^{-(n+1)}} = \frac{\sqrt{D'_{n-1} D'_{n+1}}}{D'_n} = \frac{\sqrt{D_n D_{n+2}}}{D_{n+1}}.$$

$$b_{n+1} = \frac{\Delta'_n}{D'_n} - \frac{\Delta'_{n-1}}{D'_{n-1}} = \frac{\Delta_{n+1}}{D_{n+1}} - \frac{\Delta_n}{D_n} . \blacksquare$$

Теперь мы приведем следствие из леммы I.2.2, характеризующее моментные последовательности разностных выражений (I.2.I), для которых  $B_n = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Выражения такого вида связаны с некоторыми цепочками нелинейных дифференциально-разностных уравнений, которые будут рассмотрены в гл. II.

" Лемма I.2.4. Для разностного выражения (I.2.I) следующие утверждения эквивалентны:

1.  $B_n = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ );
2.  $S_{2n+1} = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ).

Доказательство. Пусть  $B_n = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Тогда  $S_1 = B_0 = 0$  и  $S_1^{(1)} = B_1 = 0$ . Из (I.2.I6) следует, что  $S_3 = S_2 S_1 + S_0 C_0 S_1^{(1)} A_0 + S_1 C_0 S_0^{(1)} A_0 = 0$ . Пусть доказано, что  $S_{2k+1} = 0$  при  $k \leq n$ , тогда и  $S_{2k+1}^{(1)} = 0$  при  $k \leq n$  и  $S_{2n+3} = \sum_{p=0}^{2n+1} S_p C_0 S_{2n+1-p}^{(1)} A_0 = \sum_{k=0}^n (S_{2k} C_0 S_{2(n-k)+1}^{(1)} + S_{2k+1} S_{2(n-k)}^{(1)}) A_0 = 0$ .

Обратно, пусть  $S_{2n+1} = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Тогда для любого  $n \in \mathbb{Z}_+$  в каждом слагаемом выражения (I.2.I9) для  $\mathcal{D}_{2n+1}(S)$  по крайней мере одно из чисел  $i_1, \dots, i_k$  нечетно. Следовательно,  $\mathcal{D}_{2n+1}(S) = 0$  и  $S_{2n+1}^{(1)} = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Аналогично можно показать, что  $S_{2n+1}^{(m)} = 0$  ( $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ), а значит, и  $B_m = S_1^{(m)} = 0$  для любого  $m \in \mathbb{Z}_+$ .  $\blacksquare$

До сих пор мы не накладывали никаких условий на рост по  $n$  коэффициентов  $A_n, B_n, C_n$  разностного выражения (I.2.I). Теперь предположим, что они ограничены в совокупности:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (\|A_n\|, \|B_n\|, \|C_n\|) \leq C < \infty .$$

Тогда для любого  $p \geq 1$  разностное выражение  $L$  порождает [page 47]  
 в пространстве  $\ell_p(H, [0, \infty)) = \{(u_n)_{n=0}^\infty \mid u_n \in H, \sum_{n=0}^\infty \|u_n\|^p < \infty$

оператор, который мы тоже будем обозначать буквой  $L$ . Этот оператор ограничен:  $\sum_{n=0}^\infty \|(Lu)_n\|^p = \sum_{n=0}^\infty \|A_{n-1}u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1}\|^p \leq \leq \sum_{n=0}^\infty (\|A_n\|^p + \|B_n\|^p + \|C_n\|^p) \|u_n\|^p \leq 3c^p \sum_{n=0}^\infty \|u_n\|^p$ .

Для  $z > \|L\|$  рассмотрим резольвенту  $R_z = R_z(L) = (L - z1)^{-1}$  и подсчитаем оператор  $R_z \delta_0 \in \mathcal{L}(H)$ , где  $\delta_0: H \ni x \mapsto$

$(x, 0, 0, \dots) \in \ell_p(H; [0, \infty))$ . Пусть последовательность полиномов  $Q_n(z) (n \in \mathbb{Z}_+)$ , заданная рекуррентными соотношениями  $Q_0(z) = 0, Q_1(z) = C_0^{-1}, A_{n-1}Q_{n-1}(z) + B_n Q_n(z) + C_n Q_{n+1}(z) = zQ_n(z) (n \in \mathbb{N})$ . (I.2.27)

Разностное выражение (I.2.1) действует на последовательность  $q(z) = (Q_0(z), Q_1(z), \dots)$  следующим образом:  $(Lq(z))_n = = zQ_n(z) + \delta_{n0}1 (n \in \mathbb{Z}_+)$ . Отсюда следует, что  $((L - z1)(-q(z) + R_z \delta_0))_n = Q_n(z)$ . В силу определения последовательности  $p(z) = (p_0(z), p_1(z), \dots)$  получаем  $(R_z \delta_0)_n = Q_n(z) + + p_n(z) M(z)$ , где  $M(z) \in \mathcal{L}(H)$ . Положим  $n=0$ , тогда  $M(z) = (R_z \delta_0)_0$ . Воспользуемся разложением в ряд для резольвенты  $R_z = -\sum_{n=0}^\infty z^{-n-1} L^n$ . Отсюда

$$M(z) = -\sum_{n=0}^\infty z^{-n-1} (L^n)_{00} = -\sum_{n=0}^\infty z^{-n-1} S_n. \quad (I.2.28)$$

Таким образом,

$$R_z \delta_0 = q(z) + p(z) M(z), \quad (I.2.29)$$

где  $M(z)$  определяется формулой (I.2.28).

Заметим, что если распространить действие отображения  $R$  с операторных полиномов на ряды  $u(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty u_k \lambda^k, v(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty v_k \lambda^k$ , воспользовавшись формулой, аналогичной (I.2.8)

$$R(u(\lambda), v(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_k S_{k+j} v_j,$$

в случае, когда правая часть имеет смысл, то (I.2.28) можно переписать в виде

$$M(z) = R\left(\frac{1}{\lambda - z}, 1, 1\right).$$

В заключение этого пункта докажем формулы, выражающие полиномы  $Q_n(z)$  через полиномы  $P_n(z)$  и обобщенную спектральную функцию  $R$ :

$$Q_n(z) = R\left(\frac{1}{\lambda - z} (P_n(\lambda) - P_n(z)), 1\right) \quad (I.2.30)$$

(аналогичные формулы справедливы для операторных якобиевых матриц). Действительно, для любого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $R\left(\frac{1}{\lambda - z} (P_n(\lambda) - P_n(z)), 1\right) = R\left(\frac{1}{\lambda - z} (\lambda P_n(\lambda) - z P_n(z)) - P_n(\lambda), 1\right)$ . Из (I.2.5) следует, что

$R(P_n(\lambda), 1) = 0$ , а из рекуррентных соотношений (I.2.2), что  $\lambda P_n(\lambda) - z P_n(z) = A_{n-1}(P_{n-1}(\lambda) - P_{n-1}(z)) + B_n(P_n(\lambda) - P_n(z)) + C_n(P_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}(z))$ . Поэтому для последовательности

$R\left(\frac{1}{\lambda - z} (P_n(\lambda) - P_n(z)), 1\right) (n \in \mathbb{N})$  выполняются те же рекуррентные соотношения, что и для  $Q_n(z)$ , при этом

$$R\left(\frac{1}{\lambda - z} (P_0(\lambda) - P_0(z)), 1\right) = 0 = Q_0(z)$$

$$R\left(\frac{1}{\lambda - z} (P_1(\lambda) - P_1(z)), 1\right) = C_0^{-1} = Q_1(z)$$

что и доказывает формулы (I.2.29).

2. Конечные разностные выражения. Рассмотрим теперь разностные выражения, действующие на конечные последовательности  $(u_0, u_1, \dots, u_N)$  элементов пространства  $H$ :

$$(Lu)_n = A_{n-1}u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} \quad (I.2.3I)$$

$$(n=0, \dots, N; u_{-1} = u_{N+1} = 0; B_n \in \mathcal{L}(H) (n=0, \dots, N), A_n, C_n \in \mathcal{L}(H)$$

и обратимы  $(n=0, \dots, N-1)$ ).  $L$  порождает ограниченный оператор в пространстве

$$H^{N+1} = \{u = (u_n)_{n=0}^N \mid u_n \in H\} \quad (\|u\|_{H^{N+1}} = \sum_{n=0}^N \|u_n\|).$$

Как и в п. I мы можем задать последовательности операторных полиномов  $(P_n(\lambda))_{n=0}^N$ ,  $(P_n^+(\lambda))_{n=0}^N$ ,  $(Q_n(\lambda))_{n=0}^N$ , полагая

$$P_{-1}(\lambda) = P_{-1}^+(\lambda) = 0, P_0(\lambda) = P_0^+(\lambda) = 1, Q_0(\lambda) = 0, Q_1(\lambda) = C_0^{-1},$$

$$A_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + B_n P_n(\lambda) + C_n P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), P_{n-1}^+(\lambda) C_{n-1} + P_n^+(\lambda) B_n + P_{n+1}^+(\lambda) A_n = \lambda P_n^+(\lambda) \quad (n=0, \dots, N-1),$$

$$A_{n-1}Q_{n-1}(\lambda) + B_n Q_n(\lambda) + C_n Q_{n+1}(\lambda) = \lambda Q_n(\lambda) \quad (n=1, \dots, N-1). \quad (I.2.32)$$

Кроме того, положим

$$P_{N+1}(\lambda) = (\lambda 1 - B_N) P_N(\lambda) - A_{N-1} P_{N-1}(\lambda), \quad (I.2.33)$$

$$Q_{N+1}(\lambda) = (\lambda 1 - B_N) Q_N(\lambda) - A_{N-1} Q_{N-1}(\lambda).$$

Тогда соотношения (I.2.3) леммы I.2.I выполняются при  $n, m=0, \dots, N$ .

Пусть, как обычно,  $S_n = (L^n)_{00}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Определим обобщенную спектральную функцию  $R$  выражения (I.2.3I) формулой (I.2.8).

Лемма I.2.5. Выполняются "соотношения ортогональности"

$$R(P_n(\lambda), P_m^+(\lambda)) = \delta_{nm} 1 \quad (n, m=0, \dots, N). \quad (I.2.34)$$



Доказательство. Для  $n=0, \dots, N$  введем операторы  $\delta_n: H \rightarrow H$  (Page 50)  
 $(0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0) \in H^{N+1}$ ,  $\delta_n^+: H^{N+1} \ni (u_0, \dots, u_N) \mapsto u_n \in H$ .

( $\delta_{-1}, \delta_{-1}^+$  - тривиальные операторы). Тогда (I.2.3I) можно переписать двумя различными способами:

$$L\delta_n = \delta_{n-1}C_{n-1} + \delta_n B_n + \delta_{n+1}A_n, \quad (I.2.35)$$

$$\delta_n^+ L = A_{n-1}\delta_{n-1}^+ + B_n\delta_n^+ + C_n\delta_{n+1}^+, \quad (n=0, \dots, N-1). \quad (I.2.35)$$

Из (I.2.35)  $\delta_n$  рекуррентно выражаются через  $L$ ,  $\delta_0$  и коэффициенты разностного выражения:  $\delta_{n+1} = [L\delta_n - \delta_n B_n - \delta_{n-1}C_{n-1}]A_n^{-1}$ .  
 Например,  $\delta_1 = (L\delta_0 - \delta_0 B_0)A_0^{-1}$ ,  $\delta_2 = [(L^2\delta_0 - L\delta_0 B_0)A_0^{-1} - \delta_0 C_0]A_1^{-1}$ .

Вообще,  $\delta_n = \sum_{k=0}^n L^k \delta_0 F_{nk}$ , где  $F_{nk} \in \mathcal{L}(H)$ . При этом в силу (I.2.35) для  $F_{nk}$  справедливы соотношения  $F_{nk+1} = F_{n-1,k}C_{n-1} + F_{n,k}B_n + F_{n+1,k}A_n$  ( $n=0, \dots, N-1$ ;  $F_{nk}=0$  при  $n < k$ ).

Но из (I.2.32) следует, что такие же соотношения выполняются для коэффициентов полиномов  $P_n^+(\lambda) = \sum_{k=0}^n \lambda^k P_{nk}^+$ , поэтому

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n L^k \delta_0 P_{nk}^+ \quad (n=0, \dots, N) \quad \text{Совершенно аналогично из (I.2.35)}$$

следует, что  $\delta_n^+ = \sum_{k=0}^n P_{nk} \delta_0^+ + L^k$  ( $n=0, \dots, N$ ),

где  $\sum_{k=0}^n P_{nk} \lambda^k = P_n(\lambda)$  из (I.2.32). Очевидно, что  $\delta_n^+ \delta_m = \delta_{nm} 1$

С другой стороны, как мы показали,  $\delta_n^+ \delta_m = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{nk} \delta_0^+ L^{k+j} \delta_0 P_{mj}^+ =$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{nk} (L^{k+j})_{00} P_{mj}^+ = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{nk} S_{k+j} P_{mj}^+ =$$

$$= R(P_n(\lambda), P_m^+(\lambda)),$$

откуда и следует (I.2.34).

Лемма I.2.6. Существуют такие операторы  $F_0, F_1, \dots, F_N \in \mathcal{L}(H)$ , что для любого  $k \in \mathbb{Z}_+$

$$S_{N+k+1} = \sum_{j=0}^N F_j S_{k+j} . \quad (I.2.36)$$

Доказательство. Рассмотрим  $R_z$  - резольвенту  $L$ , как оператора из  $\mathcal{L}(H^{N+1})$  при  $z > \|L\|$ . Пусть  $q(z) = (Q_0(z), \dots, Q_N(z))$ ,  $p(z) = (P_0(z), \dots, P_N(z))$ . Из рекуррентных соотношений (I.2.32) следует, что последовательность  $(q(z) - R_z \delta_0)$  удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям, что и последовательность  $p(z)$ , то есть  $R_z \delta_0 = q(z) + p(z) M(z)$ , где  $M(z) = (R_z \delta_0)_0$ . С другой стороны, из равенства  $(L - zI) R_z \delta_0 = \delta_0$ , следует, что  $A_{N-1} (R_z \delta_0)_{N-1} + B_N (R_z \delta_0)_N = z (R_z \delta_0)_N$ , или  $0 = (zI - B_N) Q_N(z) - A_{N-1} Q_{N-1}(z) + [(zI - B_N) P_N(z) - A_{N-1} P_{N-1}(z)] M(z)$ . Таким образом, мы доказали, что справедливо равенство

$$Q_{N+1}(z) + P_{N+1}(z) M(z) = 0 \quad (I.2.37)$$

где  $Q_{N+1}(z)$ ,  $P_{N+1}(z)$  - полиномы (I.2.33).

При  $z > \|L\|$  функция  $M(z)$  представляется равномерно сходящимся рядом (I.2.28). Подставляя (I.2.28) в (I.2.37) и приравнявая нулю коэффициенты при отрицательных степенях  $z$ , мы получим  $\sum_{j=0}^{N+1} P_{N+1j} S_{k+j} = 0$  где  $\sum_{j=0}^{N+1} P_{N+1j} z^j = P_{N+1}(z)$ .

Отсюда следует (I.2.36), если положить  $F_j = -P_{N+1, N+1}^{-1} P_{N+1j}$  ( $j = 0, \dots, N$ ). ■

Таким образом, обобщенная спектральная функция  $R$ , соответствующая разностному выражению (I.2.3I), которая однозначно восстанавливается по моментной последовательности  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  при помощи формулы (I.2.8), удовлетворяет условиям (I.2.34), (I.2.36). Справедлива теорема, аналогичная теоремам I.2.1, I.2.2.

Теорема I.2.4. Для того, чтобы последовательность операторов из  $\mathcal{L}(H) (S_n)_{n=0}^{\infty}$  являлась моментной последовательностью некоторого разностного выражения вида (I.2.3I) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1.  $S_0 = 1$

2. Для некоторых  $F_0, \dots, F_N \in \mathcal{L}(H)$

$$S_{N+k+1} = \sum_{j=0}^N F_j S_{j+k} \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

3. При  $n=0, \dots, N$  оператор-матрица  $(S_{j+k})_{j,k=0}^n$  является обратимым оператором в пространстве  $H^{n+1}$ .

Между разностными выражениями вида (I.2.3I) такими, что  $S_n = 1$  ( $n=0, \dots, N-1$ ) и обобщенными спектральными функциями  $R$ , порожденными последовательностями, удовлетворяющими условиям I-3, существует взаимнооднозначное соответствие, которое задается формулами

$$\begin{aligned} R(\lambda^n 1, 1) &= S_n = (L^n)_{00} \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \\ B_m &= R(\lambda P_m(\lambda), P_m^+(\lambda)) \quad (m=0, \dots, N), \\ A_m &= R(\lambda P_{m+1}(\lambda), P_m^+(\lambda)), \quad (m=0, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (I.2.38).$$

где  $P_m(\lambda) = \lambda^m 1 + \dots$ ,  $P_m^+(\lambda)$  — полиномы степени  $m$  ( $m=0, \dots, N$ ), удовлетворяющие (I.2.34).

Доказательство. Необходимость условия 2 доказана в лемме I.2.6, а необходимость условий I и 3 доказывается точно так же, как в теореме I.2.I.

При доказательстве достаточности, аналогично теореме I.2.I, показывается, что при  $n=0, \dots, N$  для любого многочлена  $R_n(\lambda)$  степени  $n$  со старшим коэффициентом 1 найдется многочлен  $Q_n(\lambda)$  степени  $n$  такой, что  $R(R_n(\lambda), Q_n(\lambda)) = 1$ . После этого при помощи процедуры, описанной при доказательстве достаточности в теореме I.2.I строятся системы полиномов  $P_n(\lambda), P_n^+(\lambda)$

$(n=0, \dots, N)$  такие, что  $P_n(\lambda), P_n^+(\lambda)$  - полиномы  $n$ -й степени, старший коэффициент  $P_n(\lambda)$  равен 1 и выполняются соотношения (I.2.34). При  $n \geq N+1$  процесс псевдоортогонализации не может быть продолжен. Действительно, пусть  $P_{N+1}(\lambda) = \lambda^{N+1} + \sum_{k=0}^N P_{N+1,k} \lambda^k$  - полином, для которого выполняются равенства  $R(P_{N+1}(\lambda), \lambda^k \mathbb{1}) = 0$  ( $k=0, \dots, N$ ) или, что то же самое,  $S_{N+k+1} = -\sum_{j=0}^N P_{N+1,j} S_{k+j}$  ( $k=0, \dots, N$ ). Тогда из условия 2 теоремы и обратимости оператора  $\|S_{k+j}\|_{k,j}^N = 0$  в  $H^{N+1}$  следует, что  $P_{N+j} = -F_j$ . Значит, условие 2 эквивалентно условию  $R(P_{N+1}(\lambda), \lambda^k \mathbb{1}) = 0$  ( $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ ) и процесс псевдоортогонализации не может быть продолжен.

Формулы (I.2.38) получаются так же, как формулы (I.2.14) теоремы I.2.2.

Отметим, что формулы (I.2.16), (I.2.19), (I.2.20) и (I.2.23) непосредственно переносятся на случай конечных разностных выражений с единственным изменением: последовательности  $S^{(m)} = (S_n^{(m)})_{n=0}^\infty$  рассматриваются лишь при  $m=0, \dots, N$ .

3. Разностные выражения с операторными коэффициентами на всей оси. Рассмотрим разностное выражение

$$(Lu)_n = A_{n-1}u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} \quad (\text{I.2.39})$$

( $n \in \mathbb{Z}, u = (u_n)_{n=-\infty}^\infty, u_n \in H; A_n, B_n, C_n \in \mathcal{L}(H)$ ,

причем  $A_n$  и  $C_n$  - обратимы). Применим к  $L$  метод удвоения для того, чтобы получить разностное выражение вида (I.2.1):

последовательности  $u = (u_n)_{n=-\infty}^\infty$  поставим в соответствие

последовательности  $\tilde{u} = (\tilde{u}_n)_{n=0}^\infty$ , где  $\tilde{u}_n = \text{col}(u_{n-1}, u_n) \in H^2$  и рассмотрим разностное выражение  $\tilde{L} = \tilde{I} L \tilde{I}^{-1}$ , дейст-

вующие на последовательности  $\tilde{u} = (\tilde{u}_n)_{n=0}^{\infty}$

[page 54]

$$\tilde{u}_n = \text{col}(u_{n1}, u_{n2}) \in H^2 :$$

$$(\tilde{L} \tilde{L}^{-1} \tilde{u})_0 = \begin{pmatrix} (L \tilde{L}^{-1} \tilde{u})_{-1} \\ (L \tilde{L}^{-1} \tilde{u})_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{-2} u_{11} + B_{-1} u_{01} + C_{-1} u_{02} \\ A_{-1} u_{01} + B_0 u_{02} + C_0 u_{12} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_{-1} & C_{-1} \\ A_{-1} & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{-2} & 0 \\ 0 & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \tilde{B}_0 \tilde{u}_0 + \tilde{C}_0 u_1,$$

$$(\tilde{L} \tilde{L}^{-1} \tilde{u})_n = \begin{pmatrix} (L \tilde{L}^{-1} \tilde{u})_{-n+1} \\ L \tilde{L}^{-1} \tilde{u}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{-n-2} (\tilde{L}^{-1} \tilde{u})_{-n-2} + B_{-n-1} (\tilde{L}^{-1} \tilde{u})_{-n-1} + C_{-n-1} (\tilde{L}^{-1} \tilde{u})_{-n} \\ A_{n-1} (\tilde{L}^{-1} \tilde{u})_{n-1} + B_n (\tilde{L}^{-1} \tilde{u})_n + C_n (\tilde{L}^{-1} \tilde{u})_{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{-n-2} u_{n+1,1} + B_{-n-1} u_{n,1} + C_{-n-1} u_{n-1,1} \\ A_{n-1} u_{n-1,2} + B_n u_{n,2} + C_n u_{n+1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{-n-1} & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1,1} \\ u_{n-1,2} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} B_{-n-1} & 0 \\ 0 & B_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{-n-2} & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1,1} \\ u_{n+1,2} \end{pmatrix} = \tilde{A}_{n-1} \tilde{u}_{n-1} + \tilde{B}_n \tilde{u}_n + \tilde{C}_n \tilde{u}_{n+1}$$

$$(n \in \mathbb{N})$$

Таким образом, разностное выражение  $\tilde{L}$  имеет вид

$$(\tilde{L} \tilde{u})_n = \tilde{A}_{n-1} \tilde{u}_{n-1} + \tilde{B}_n \tilde{u}_n + \tilde{C}_n \tilde{u}_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, \tilde{u}_{-1} = 0) \quad (I.2.40)$$

где

$$\tilde{A}_n = \begin{pmatrix} C_{n-1} & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_n = \begin{pmatrix} A_{n-2} & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} (n \in \mathbb{Z}_+),$$

$$\tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} B_{-1} & C_{-1} \\ A_{-1} & B_0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ 0 & B_n \end{pmatrix} (n \in \mathbb{N}). \quad (I.2.4I)$$

К разностному выражению (I.2.40) применим все результаты пункта I данного параграфа: для него можно построить системы полиномов  $P_n(\lambda)$ ,  $P_n^+(\lambda)$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ), удовлетворяющие (I.2.2) и задать обобщенную спектральную функцию  $R$  при помощи (I.2.5) или при помощи (I.2.8), где

$$S_n = (\tilde{L}^n)_{00} = \begin{pmatrix} (L^n)_{-1-1} & (L^n)_{-10} \\ (L^n)_{0-1} & (L^n)_{00} \end{pmatrix} (n \in \mathbb{Z}_+) \quad (I.2.42)$$

По всякой обобщенной спектральной функции  $R$  со значениями в пространстве матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathcal{L}(H)$  и удовлетворяющей условиям теоремы I.2.I можно построить некоторое разностное выражение  $\tilde{L}$  вида (I.2.39). Однако при этом возникает вопрос об описании обобщенных спектральных функций, которым отвечает  $\tilde{L}$  с коэффициентами вида (I.2.4I). Ответ на этот вопрос дает

**Теорема I.2.5.** Для того, чтобы отображение  $R$ , удовлетворяющее условиям теоремы I.2.I, являлось обобщенной спектральной функцией некоторого разностного выражения (I.2.40) с коэффициентами вида (I.2.4I) необходимо и достаточно, чтобы для его моментной последовательности  $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$  выполнялось любое из эквивалентных условий:

$$1. \text{ Для любого } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \sum_{k=0}^n S_k [S_1, J] S_{n-k} = [S_{n+1}, J]. \quad (I.2.43)$$

$$2. \text{ Для любого } n \geq 2 \quad [D_n(S), J] = 0. \quad (I.2.44)$$

Здесь  $\Phi_n(S)$  задается формулами (I.2.19),  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Доказательство. Пусть коэффициенты (I.2.39) имеют вид (I.2.41). Покажем, что в этом случае выполняется (I.2.43). При  $n=0$  выполнение (I.2.43) очевидно. Предположим, что мы доказали это равенство при  $n=1, 2, \dots, m$  и рассмотрим оператор  $K = \sum_{k=0}^{m+1} S_k [S_1, J]^*$

$$\cdot S_{m+1-k} = S_{m+1} [S_1, J] + S_m [S_1, J] S_1 + \sum_{k=0}^{m-1} S_k [S_1, J] S_{m+1-k}.$$

Последнюю сумму можно переписать, используя (I.2.16)

$$\sum_{k=0}^{m-1} S_k [S_1, J] S_{m+1-k} = \sum_{k=0}^{m-1} S_k [S_1, J] S_{m-k} S_1 + \\ + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-k-1} S_k [S_1, J] S_{m-k-j-1} \tilde{C}_0 S_j^{(1)} \tilde{A}_0$$

где  $(S_j^{(1)})_{j=0}^{\infty}$  — последовательность моментов, отвечающая разностному выражению

$$(\tilde{L}_1 \tilde{u})_n = \tilde{A}_n \tilde{u}_{n-1} + \tilde{B}_{n+1} \tilde{u}_n + \tilde{C}_{n+1} \tilde{u}_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, \tilde{u}_{-1} = 0).$$

Из (I.2.40) и равенства  $S_j^{(1)} = (L_1^j)_{00}$  ( $j \in \mathbb{Z}_+$ ) следует, что операторы  $\tilde{C}_0 S_j^{(1)} \tilde{A}_0$  и  $J$  коммутируют. Перепишем теперь

$K$  в виде

$$K = S_{m+1} [S_1, J] + \sum_{k=0}^m S_k [S_1, J] S_{m-k} S_1 + \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} S_k [S_1, J] S_{(m-j-1)-k} \tilde{C}_0 S_j^{(1)} \tilde{A}_0.$$

Тогда в силу предположения индукции

$$K = S_{m+1} [S_1, J] + [S_{m+1}, J] S_1 + \sum_{j=0}^{m-1} [S_{m-j}, J] \tilde{C}_0 S_j^{(1)} \tilde{A}_0 = \\ = [S_{m+1} S_1, J] + \sum_{j=0}^{m-1} [S_{m-j} \tilde{C}_0 S_j^{(1)} \tilde{A}_0, J] + [\tilde{C}_0 S_m^{(1)} \tilde{A}_0, J] = \\ = [S_{m+1} S_1 + \sum_{j=0}^m S_{m-j} \tilde{C}_0 S_j^{(1)} \tilde{A}_0, J].$$

Снова воспользовавшись (I.2.I6), получаем, что  $K = [S_{m+2}, J]$  что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что выполняется (I.2.43) и докажем, что тогда справедливы соотношения (I.2.44). Действительно, полагая в (I.2.43)  $n = 1$ , мы получим  $S_1[S_1, J] + [S_1, J]S_1 = [S_2, J]$  или  $[S_2 - S_1^2, J] = [\Phi_2(S), J] = 0$ .

Пусть (I.2.44) выполняется при  $n = 2, 3, \dots, m$ . Тогда из (I.2.22) и предположения индукции следует, что

$$[\Phi_{m+1}(S), J] = [S_{m+1}, J] - [S_m S_1, J] - \sum_{j=1}^{m-1} [S_j, J] \Phi_{m+1-j}(S).$$

Воспользуемся (I.2.43). Тогда

$$\begin{aligned} [\Phi_{m+1}(S), J] &= \sum_{k=0}^{m-1} S_k [S_1, J] S_{m-k} - [S_m, J] S_1 - \\ &- \sum_{j=1}^{m-1} [S_j, J] \Phi_{m+1-j}(S) = \sum_{k=0}^{m-1} S_k [S_1, J] (S_{m-k} - S_{m-k-1} S_1) - \\ &- \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{j-1} S_k [S_1, J] S_{j-1-k} \Phi_{m+1-j}(S) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} S_k [S_1, J] (S_{m-k} - S_{m-k-1} S_1 - \sum_{j=0}^{m-k-2} S_j \Phi_{m+1-j}(S)) = 0, \end{aligned}$$

Так как в силу (I.2.22)  $S_{m-k} - S_{m-k-1} S_1 - \sum_{j=0}^{m-k-2} S_j \Phi_{m+1-j}(S) = \Phi_{m-k}(S)$ .

Для завершения доказательства теоремы нам необходимо показать, что из условий (I.2.44) следует, что отображение  $R$ , соответствующее моментной последовательности  $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$ , является обобщенной спектральной функцией некоторого разностного выражения (I.2.40) с коэффициентами вида (I.2.41). Действительно, теорема I.2.2 утверждает, что последовательности  $S$  соответствует единственное разностное выражение  $\tilde{L}$ , удовлетворяющее дополнительному условию  $\tilde{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Тогда, в силу теоремы I.2.3 раз-



ностному выражению  $\tilde{L}_1$  соответствует моментная последовательность

$$S^{(1)} = (S_n^{(1)})_{n=0}^{\infty} = (\Phi_{n+2}(S) \Phi_2(S)^{-1})_{n=0}^{\infty}, \text{ причем}$$

$[S_n^{(1)}, J] = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$ . Тогда из формул (I.2.23) теоремы I.2.3 следует, что  $\tilde{A}_n \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$  и  $\tilde{B}_n \quad (n \in \mathbb{N})$  имеют вид (I.2.4I). ■

Теорема I.2.5 описывает обобщенную спектральную функцию разностного выражения на всей оси (I.2.39) и обобщает теорему I.2.4. В самом деле, пусть  $\rho(\Delta) = (\rho_{\alpha, \beta}(\Delta))_{\alpha, \beta = -1, 0}$  — положительно определенная матричная мера из теоремы I.1.4,

$$M(z) = (M_{\alpha, \beta}(z))_{\alpha, \beta = -1, 0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\rho(\lambda) \quad - \text{соответст-}$$

вующая ей функция Вейля,  $S_n = (S_n; \alpha, \beta)_{\alpha, \beta = -1, 0} =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\rho(\lambda) \quad (n \in \mathbb{Z}_+) - \text{моменты меры } \rho. \text{ Воспользуемся}$$

представлением  $M(z)$  в виде ряда  $M(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} S_n$ .

Сравнивая коэффициенты при  $z^{-n-1}$  в обеих частях (I.2.20), получим

$$-\alpha \sum_{j=0}^{n-1} (S_j; 0, 0 S_{n-1-j}; -1, -1 - S_j; 0, -1 S_{n-1-j}; 0, -1) = S_n; 0, -1,$$

$$\text{причем } \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\rho_{0, -1}(\lambda) = S_1; 0, -1. \quad \text{Но точно такое же}$$

соотношение можно получить, расписывая поэлементно матричное равенство (I.2.43). Таким образом, (I.2.20) эквивалентно (I.2.43), и теорема I.2.5 является обобщением теоремы I.2.4.

В заключение параграфа докажем для разностного выражения (I.2.38) лемму, аналогичную лемме I.2.4.

Лемма I.2.7. Пусть  $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$  — моментная последовательность, соответствующая разностному выражению (I.2.38)

$$S_n = (S_n; \alpha, \beta)_{\alpha, \beta = -1, 0}, \text{ где } S_n; \alpha, \beta \in \mathcal{L}(H).$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

$$1. B_n = 0 \quad (n \in \mathbb{Z});$$

$$2. S_{2n+1, \alpha\alpha} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}; \alpha = -1, 0)$$

$$\text{и } S_{2n, \alpha\beta} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}; \alpha, \beta = -1, 0, \alpha \neq \beta) \quad (1.2.45)$$

Доказательство. Пусть  $B_n = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$ . Рассмотрим разностное выражение  $\tilde{L}$ , соответствующее (I.2.38) и разностное выражение  $\tilde{L}_1$ , которое задается формулой (I.2.15). Тогда для  $\tilde{L}_1$  выполняются условия леммы I.2.4, т.е.  $S_{2n+1}^{(m)} = 0$

$$(n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}) \text{ Кроме того, } [S_{2n}^{(m)}, J] = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}).$$

Тогда из (I.2.16) следует, что

$$S_{2n+2} = S_{2n+1} S_1 + \sum_{p=0}^n S_{2p} \tilde{C}_0 S_{2n-2p}^{(1)} \tilde{A}_0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

$$S_{2n+3} = S_{2n+2} S_1 + \sum_{p=0}^n S_{2p+1} \tilde{C}_0 S_{2n-2p}^{(1)} \tilde{A}_0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

$$\text{Учитывая, что } S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_1 = \begin{pmatrix} 0 & C_{-1} \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ мы по индукции}$$

убедимся в справедливости соотношений (I.2.45).

Наоборот, пусть выполняется (I.2.45), тогда, с одной стороны, из (I.2.19), (I.2.20) следует, что  $S_{2n+1, \alpha\alpha}^{(1)} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+, \alpha = 0, -1)$  т.к. в каждом слагаемом  $S_{i_1} \dots S_{i_k}$  в формуле, определяющей  $\mathcal{D}_{2n+1}(S)$  нечетное число нечетных индексов  $i_j$ .

С другой стороны, в силу (I.2.44)  $[\mathcal{D}_n(S), J] = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$ .

Поэтому  $\mathcal{D}_{2n+1}(S) = 0$ , а значит и  $S_{2n+1}^{(1)} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$ .

Тогда из леммы I.2.4 следует, что  $B_n = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$ . ■

## Г Л А В А   П

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕАБЕЛЕВЫХ ЦЕПОЧЕК НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

#### § 2.1. Неабелев аналог цепочки Тоды, связанный с операторными якобиевыми матрицами

В этом параграфе будут изучаться полубесконечные цепочки нелинейных дифференциально-разностных уравнений с операторно-значными неизвестными, связанные с операторными якобиевыми матрицами вида (I.I.2). Для их интегрирования будет использован метод обратной спектральной задачи, который был впервые применен в [3,41] для интегрирования полубесконечной цепочки Тоды. Этот метод состоит в переходе от уравнений системы к уравнениям эволюции спектральных данных ассоциированной с ней операторной якобиевой матрицы. Эта эволюция в ряде случаев оказывается простой, что позволяет, решая обратную спектральную задачу, восстановить в произвольный момент времени решения нелинейной системы.

В п. I мы опишем системы уравнений, которые могут быть записаны в форме Лакса

$$\dot{L}(t) = [L(t), A(t)] \quad (2.1.1)$$

где  $L(t)$  - гладким образом зависящая от  $t$  операторная якобиева матрица, а  $A(t)$  - трехдиагональная матрица с операторными зависящими от  $t$  элементами. В пп. 2,3 будут получены уравнения эволюции спектральных данных  $L(t)$  и процедура обратного перехода от этих уравнений к уравнению (2.1.1). При этом для неабелева аналога цепочки Тоды будет доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши и предложен метод

восстановления решения в произвольный момент времени. В п.4 мы применим результаты пп. 1-3 для получения решений специального вида полубесконечной цепочки Тоды, связанной с несимметричным разностным выражением с операторными коэффициентами ([25, 42]). В п. 5 будет рассмотрена связь между системами пп. 1.3 и потоками Тоды, изучавшимися в [43].

1. Рассмотрим операторную якобиеву матрицу  $L$ , гладким образом зависящую от времени  $t$  (то есть ее элементы один раз сильно непрерывно дифференцируемы):  $L = L(t)$ , где  $t \in [0, T)$ , а  $T \in [0, \infty)$  - фиксировано. Предположим, что выполняется уравнение Лакса (2.1.1), где  $A = A(t)$  - трехдиагональная матрица с операторными элементами. Таким образом

$$L = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_0 & B_1 & A_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_1 & B_2 & A_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \Psi_0 & \oplus_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \Phi_0 & \Psi_1 & \oplus_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Phi_1 & \Psi_2 & \oplus_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.1.2)$$

где  $A_n = A_n(t) > 0$ ,  $B_n = B_n(t) = B_n^*(t)$ ,  $\Phi_n = \Phi_n(t)$ ,  $\Psi_n = \Psi_n(t)$ ,  $\oplus_n = \oplus_n(t)$ ,  $(n \in \mathbb{Z}_+)$  - гладким образом зависящие от  $t$  операторы из  $\mathcal{L}(H)$ .

Элементы матрицы  $A$  однозначно определяются по  $\Phi_0$ ,  $\Psi_0$ ,  $\oplus_0$  и элементам матрицы  $L$ . Действительно, подставляя (2.1.2) в (2.1.1) и сравнивая элементы второй диагонали над главной, получим

$$0 = A_n \oplus_{n+1} - \oplus_n A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

откуда следует, что

[page 62]

$$\oplus_n = A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} \oplus_0 A_1 \dots A_n \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2.1.3)$$

Аналогично,

$$\Phi_n = A_n \dots A_1 \Phi_0 A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2.1.4)$$

Из симметричности матрицы  $\dot{L}$  заключаем, что

$$A_n \Psi_{n+1} + \Psi_{n+1} A_n = A_n \Psi_n + \Psi_n A_n + \oplus_n B_{n+1} + B_{n+1} \Phi_n - B_n \oplus_n - \Phi_n B_n \quad (2.1.5)$$

( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Последовательно полагая в (2.1.5)  $n = 0, 1, \dots$  и используя (2.1.3), (2.1.4), мы найдем  $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ . При этом нужно воспользоваться тем фактом, что уравнение  $AX + XA = B$  относительно  $X \in \mathcal{L}(H)$ , где  $A, B \in \mathcal{L}(H)$  и  $A > 0$ , однозначно разрешимо (см., например, [ ] ).

Переписывая матричное равенство (2.1.1) поэлементно, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{A}_n &= A_n \Psi_{n+1} - \Psi_n A_n + B_n \oplus_n - \oplus_n B_{n+1}, \\ \dot{B}_n &= A_{n-1} \oplus_{n-1} - \oplus_n A_n + A_n \Phi_n - \Phi_{n-1} A_{n-1} + B_n \Psi_n - \Psi_n B_n \\ &\quad (n \in \mathbb{Z}_+; A_{-1} = 0; t \in [0, T]), \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

которая вместе с соотношениями (2.1.3) - (2.1.5), где  $\Phi_0, \Psi_0, \oplus_0$  - заданные гладкие функции  $t$ , является нелинейной системой, эквивалентной уравнению Лакса (2.1.1).

Пример 2.1.1. В случае одномерного  $H = \mathbb{C}^1$  элементы матриц (2.1.2) являются вещественнозначными функциями и система уравнений (2.1.6) превращается в несколько усложненную полубесконечную цепочку Тоды:

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= \frac{1}{2} \{ a_n (b_{n+1} - b_n), \dot{b}_n = \frac{1}{2} (a_n^2 - a_{n-1}^2) \\ &\quad (n \in \mathbb{Z}_+; a_{-1} = 0; t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Здесь мы обозначим  $f(t) = (\Phi_0(t) - \oplus_0(t))a_0^{-1}(t)$ ,  
 $a_n = A_n > 0$ ,  $b_n = B_n \in \mathbb{R}^1$ .

Классическая цепочка Тоды получается в случае  $f=1$ . (Более подробно по этому поводу см. [ ] ).

Пример 2.1.2. Пусть  $H = \mathbb{C}^2$ ,  $(a_n(t))_{n=-\infty}^{\infty}, (b_n(t))_{n=-\infty}^{\infty}$  — две последовательности гладких вещественнозначных функций, причем  $a_n(t) > 0$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ;  $t \in [0, T]$ ), а матрицы  $2 \times 2$   $A_n, B_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) имеют вид (I.1.19)

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{n-2} & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} (n \in \mathbb{Z}_+), B_n = \begin{pmatrix} b_{n-1} & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix} (n \in \mathbb{N}),$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Положим

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -a_{-1} \\ a_{-1} & 0 \end{pmatrix}, \Phi_0 = -\oplus_0 = \frac{1}{2} J A_0, J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.9)$$

Так как матрицы  $\Phi_0 = -\oplus_0$  и  $A_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) диагональны, то в силу (2.1.3), (2.1.4)

$$\Phi_n = -\oplus_n = \frac{1}{2} J A_n. \quad (2.1.10)$$

Это равенство и диагональность  $A_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) и  $B_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) приводят к следующей записи (2.1.5):

$$A_n \Psi_{n+1} + \Psi_{n+1} A_n = A_n \Psi_n + \Psi_n A_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$A_0 \Psi_1 + \Psi_1 A_0 = A_0 \Psi_0 + \Psi_0 A_0 - B_0 \oplus_0 - \Phi_0 B_0. \quad (2.1.11)$$

Первое из этих равенств дает  $\Psi_1 = \Psi_2 = \dots$ . Далее, учитывая (2.1.8) и (2.1.9), получаем

$$B_0 \oplus \Phi_0 B_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-2} & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a_{-2} & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix} = \quad [\text{page 64}]$$

$$= A_0 \Psi_1 + \Psi_1 A_0.$$

Поэтому из второго равенства (2.1.II) заключаем, что  $A_0 \Psi_1 + \Psi_1 A_0 = 0$  и, следовательно,  $\Psi_1 = 0$ . Таким образом,  $\Psi_n = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Учитывая полученное равенство, а также (2.1.9), (2.1.I0), перепишем систему (2.1.6) в виде

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{2} J A_0 B_1 - \frac{1}{2} B_0 J A_0 - \Psi_0 A_0, \quad \dot{B}_0 = J A_0^2 + [B_0, \Psi_0] \quad (2.1.I2)$$

$$\dot{A}_n = \frac{1}{2} J A_n (B_{n+1} - B_n), \quad \dot{B}_n = J (A_n^2 - A_{n-1}^2) \quad (n \in \mathbb{N}; t \in [0, T]).$$

Система 2.1.I2) эквивалентна классической цепочке Тоды на всей оси

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2} a_n (b_{n+1} - b_n), \quad \dot{b}_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 \quad (n \in \mathbb{Z}; t \in [0, T]). \quad (2.1.I3)$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_{-2} & 0 \\ 0 & \dot{a}_0 \end{pmatrix} = A_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a_{-2} & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{-2} & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{-2} & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -a_{-1} \\ a_{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-2} & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{-2}(b_{-1} - b_{-2}) & 0 \\ 0 & a_0(b_1 - b_0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{b}_{-1} & -\dot{a}_{-1} \\ -\dot{a}_{-1} & \dot{b}_0 \end{pmatrix} = B_0 = \begin{pmatrix} -a_{-2}^2 & 0 \\ 0 & -a_0^2 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -a_{-1} \\ a_{-1} & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{-1}^2 - a_{-2}^2 & \frac{1}{2} a_{-1} (b_0 - b_{-1}) \\ \frac{1}{2} a_{-1} (b_0 - b_{-1}) & a_0^2 - a_{-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем требуемые выражения для  $\dot{A}_n$  при  $n = -2, -1, 0$  и для  $\dot{B}_n$  при  $n = -1, 0$ . Для остальных значений  $n$  уравнения (2.1.13) просто следуют из (2.1.12) ввиду диагональности матриц  $A_{n-1}, A_n, B_n, B_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Следовательно, мы доказали, что система 2.1.6) со связями (2.1.3) - (2.1.5) (или, что то же, уравнение Лакса (2.1.1)) в случае матриц (2.1.8), (2.1.9) эквивалентна цепочке Тоды на всей оси (2.1.13).

2. Эволюция спектральных характеристик. Для произвольного  $t \in [0, T)$  поставим в соответствие якобиевой матрице  $L(t)$  ее спектральные характеристики: спектральную меру  $dg(\lambda; t)$  и функцию Вейля  $m(z; t)$ . Найдем уравнения, согласно которым эволюционируют во времени эти характеристики, если матрица  $L(t)$  меняется согласно уравнению Лакса (2.1.1), то есть ее элементы  $(A_n(t))_{n=0}^\infty, (B_n(t))_{n=0}^\infty$  - согласно системе (I5), (I2)-(I4). При этом будем предполагать, что  $\forall t \in (0, T)$

$$\sup_{t \in [0, T); n \in \mathbb{Z}_+} (\|A_n(t)\|, \|B_n(t)\|, \|\dot{A}_n(t)\|, \|\dot{B}_n(t)\|) < \infty \quad (2.1.14)$$

и поэтому оператор  $\dot{L}(t)$  существует и ограничен  $\forall t \in [0, T)$  (вместе с  $L(t)$ ).

Пусть  $R_z(L(t)) = (L(t) - zI)^{-1} = R_z(t)$  ( $t \in [0, T)$ ,  $z \in \mathbb{C}' \setminus \mathbb{R}'$ ) - резольвента оператора  $L(t)$ . Условие (I.I.I4) влечет за собой сильную непрерывную дифференцируемость  $L(t)$ , а следовательно и  $R_z(t)$  (см. [23]). В силу (2.1.1)



Поэтому, дифференцируя резольвенту по известной формуле

$$\dot{R}_z(t) = -R_z(t) \dot{L}(t) R_z(t),$$

мы получим

$$\begin{aligned} \dot{R}_z(t) &= -R_z(t)((L(t) - zI)A(t) - A(t)(L(t) - zI)) \times \\ &\times R_z(t) = -A(t)R_z(t) + R_z(t)A(t) = [R_z(t), A(t)]. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Выясним, как эволюционирует функция Вейля  $m(z; t) = \delta_0^* R_z(t) \delta_0$ . Согласно (2.1.15) и ввиду (2.1.2) матрицы  $A(t)$  имеем

$$\begin{aligned} \dot{m}(z; t) &= \delta_0^* \dot{R}_z(t) \delta_0 = \delta_0^* [R_z(t), A(t)] \delta_0 = \delta_0^* R_z(t) A(t) \delta_0 - \\ &- \delta_0^* A(t) R_z(t) \delta_0 = \delta_0^* R_z(t) (\delta_0 \Psi_0(t) + \delta_1 \Phi_0(t)) - \\ &- (\Psi_0(t) \delta_0^* + \Phi_0(t) \delta_1^*) R_z(t) \delta_0 = R_{z, \infty}(t) \Psi_0(t) + \\ &+ R_{z, 01}(t) \Phi_0(t) - \Psi_0(t) R_{z, \infty}(t) - \Phi_0(t) R_{z, 10}(t). \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Напомним формулу (1.1.11)

$$R_{z; jk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} P_j(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) R_k^*(\lambda; t),$$

где последовательность полиномов  $(P_n(\lambda; t))_{n=0}^{\infty}$  удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} A_{n-1}(t) P_{n-1}(\lambda; t) + B_n(t) P_n(\lambda; t) + A_n(t) P_{n+1}(\lambda; t) = \\ = \lambda P_n(\lambda; t) \quad (n \in \mathbb{Z}_+; P_0(\lambda; t) = 1). \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

В частности,  $P_1(\lambda; t) = A_0^{-1}(t)(zI - B_0(t))$ , поэтому

$$\begin{aligned}
 R_{z;01}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} P_0(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) P_1^*(\lambda; t) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\varrho(\lambda; t) (\lambda 1 - B_0(t)) A_0^{-1}(t) = (1 + m(z; t))^* \\
 &\times (z 1 - B_0(t)) A_0^{-1}(t);
 \end{aligned}$$

$$R_{z;10}(t) = (R_{\bar{z};01}(t))^* = A_0^{-1}(t) (1 + (z 1 - B_0(t)) m(z; t)).$$

Подставляя эти выражения в (2.1.16), найдем требуемый закон эволюции  $m(z; t)$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{m}(z; t) &= -(\Psi_0(t) + \Theta_0(t) A_0^{-1}(t) (z 1 - B_0(t))) m(z; t) + \\
 &+ m(z; t) (\Psi_0(t) + (z 1 - B_0(t)) A_0^{-1}(t) \Phi_0(t)) + A_0^{-1}(t) \Phi_0(t) - \\
 &- \Theta_0(t) A_0^{-1}(t). \quad (t \in [0, T], z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1).
 \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Используя выражение (1.1.12) для  $m(z; t)$ :

$$m(z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\varrho(\lambda; t),$$

можно убедиться, что уравнение (2.1.18) эквивалентно уравнению для спектральной меры

$$\begin{aligned}
 d\tilde{\varrho}(\lambda; t) &= -(\Psi_0(t) + \Theta_0(t) A_0^{-1}(t) (\lambda 1 - B_0(t))) d\varrho(\lambda; t) + \\
 &+ d\varrho(\lambda; t) (\Psi_0(t) + (\lambda 1 - B_0(t)) A_0^{-1}(t) \Phi_0(t)) \\
 &\quad (\lambda \in \mathbb{R}^1; t \in [0, T])
 \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

В самом деле,  $\forall z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1, t \in [0, T)$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\varrho(\lambda; t) = m(z; t) = -(\Psi_0 + \Theta_0 A_0^{-1}(zI - B_0)) \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\varrho(\lambda; t) + \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\varrho(\lambda; t) \right) (\Psi_0 + (zI - B_0) A_0^{-1} \Phi_0) + \\
& + A_0^{-1} \Phi_0 - \Theta_0 A_0^{-1} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} (\Psi_0 + \Theta_0 A_0^{-1}(\lambda I - B_0)) d\varrho(\lambda; t) + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\varrho(\lambda; t) (\Psi_0 + (\lambda I - B_0) A_0^{-1} \Phi_0). \quad (2.1.20)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенством (1.1.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varrho(\lambda; t) = 1$$

Из (2.1.20) и единственности определения меры по интегралу Стильеса следует, что для любого множества  $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$  производная  $\varrho(\alpha; t)$  существует и совпадает с интегралом относительно  $\lambda$  правой части (2.1.19) по множеству  $\alpha$ . Таким образом, из (2.1.18) следует (2.1.19). Ясно, что имеет место и обратная импликация. Мы доказали следующую лемму.

**Лемма 2.1.1.** Спектральные характеристики, соответствующие операторной яковиевой матрице  $L(t)$  ( $t \in [0, T]$ ), являющейся решением уравнения Лакса (2.1.1), эволюционируют согласно уравнениям (2.1.18) и (2.1.19).

Уравнение эволюции спектральной меры (1.2.19) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Оно содержит неизвестную функцию  $B_0(t)$  (мы считаем функции  $\Theta_0(t) A_0^{-1}(t)$  и  $A_0^{-1}(t) \Phi_0(t)$  заданными), однако в некоторых случаях можно найти решение (2.1.19), пользуясь свойствами меры  $d\varrho(\lambda; t)$ .

Рассмотрим примеры 2.1.1 и 2.1.2.

В случае полубесконечной цепочки Топы (2.1.7) все функции, входящие в уравнение (2.1.19) являются вещественнозначными и оно принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} d\dot{g}(\lambda; t) &= f(t)(\lambda - b_0(t))dg(\lambda; t); \\ dg(\lambda; t) &= \exp\left(\int_0^t (\lambda - b_0(s))f(s)ds\right)dg(\lambda; 0) \\ (\lambda \in \mathbb{R}^1, t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Мы можем воспользоваться тем, что для любого  $t$   $\int_{-\infty}^{\infty} dg(\lambda; t) = 1$

Тогда из (2.1.21) получаем

$$\exp\left(\int_0^t b_0(s)f(s)ds\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\lambda \int_0^t f(s)ds\right) dg(\lambda; 0),$$

то есть решение уравнения (2.1.21) задается формулой

$$\begin{aligned} dg(\lambda; t) &= \exp\left(\lambda \int_0^t f(s)ds\right) dg(\lambda; 0) \times \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\lambda \int_0^t f(s)ds\right) dg(\lambda; 0)\right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

При рассмотрении примера 2.1.2 мы показали, что цепочка Топы на всей оси  $(\dots, -1, 0, 1, \dots)$  эквивалентна системе уравнений (2.1.12) с условиями (2.1.8), (2.1.9). В этом случае уравнение (2.1.19) имеет вид

$$\begin{aligned} -2 d\dot{g}(\lambda; t) &= J\left(\lambda 1 - \begin{pmatrix} b_{-1} & 2a_{-1} \\ 2a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}\right) dg(\lambda; t) + \\ &+ dg(\lambda; t) \left(\lambda 1 - \begin{pmatrix} b_{-1} & 2a_{-1} \\ 2a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}\right) J. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Так как  $J$  не коммутирует с  $J \begin{pmatrix} b_{-1} & 2a_{-1} \\ 2a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}$ , решение урав-

нения (2.1.23) не расщепляется на сомножитель, зависящий от коэффициентов  $b_{-1}(t)$ ,  $b_0(t)$ ,  $a_1(t)$ , что не позволяет непосредственно выписать решение  $d\varphi(\lambda; t)$ , как это было сделано в случае уравнения (2.1.21). Различные случаи интегрируемости бесконечной цепочки Тоды (2.1.13) рассматривались в [ ]. Мы вернемся к этим уравнениям в § 2.3.

3. Перейдем к основному примеру, который будет рассматриваться в данном параграфе. Положим в (2.1.2)

$$\Phi_0 = -\Theta_0 = \frac{1}{2} A_0, \quad \Psi_0 = 0 \quad (2.1.24)$$

и заменим для удобства записи в (2.1.2)  $\Psi_n$  на  $\frac{1}{2}\Psi_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Тогда из (2.1.3), (2.1.4) следует, что  $\Phi_n = -\Theta_n = \frac{1}{2} A_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ), а (2.1.5) переписывается в виде

$$A_n \Psi_{n+1} + \Psi_{n+1} A_n = A_n \Psi_n + \Psi_n A_n + [B_{n+1} + B_n, A_n] \quad (2.1.25)$$

(Из (2.1.25) и равенства  $\Psi_0 = 0$  следует, что  $\Psi_n^* = -\Psi_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ )).

В этом случае уравнение (2.1.1) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \dot{B}_n &= A_n^2 - A_{n-1}^2 + \frac{1}{2} [B_n, \Psi_n], \\ \dot{A}_n &= \frac{1}{2} (A_n (\Psi_{n+1} + B_{n+1}) - (\Psi_n + B_n) A_n) \\ &\quad (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1} = 0, t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

вместе с соотношениями (2.1.25). Очевидно, что в скалярном случае уравнения (2.1.26) переходят в уравнения полубесконечной цепочки Тоды, что дает основания считать (2.1.26) неабелевым аналогом полубесконечной цепочки Тоды. В этом пункте будет доказана

Теорема 2.1.1. Для произвольных начальных данных  $(A_n(0), B_n(0))_{n=0}^{\infty}$ , ограниченных по норме в совокупности, существует и единственно решение задачи Коши для системы (2.1.26). Процедура построения такова: по начальным данным строится операторная якобиева матрица  $L(0)$  и отвечающая ей спектральная мера  $d\varrho(\lambda; 0)$ . Эволюция спектральной меры задается уравнением

$$d\varrho(\lambda; t) = X(t) e^{\lambda t} d\varrho(\lambda; 0) X^*(t), \quad (2.1.27)$$

где  $\dot{X}(t) = -\frac{1}{2} X(t) \dot{F}(t) F^{-1}(t)$ ,  $X(0) = 1$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\varrho(\lambda; 0). \quad (2.1.28)$$

В произвольный момент времени  $t \in (0, +\infty)$  решения  $A_n(t)$ ,  $B_n(t)$  восстанавливаются по спектральной мере  $d\varrho(\lambda; t)$  при помощи формул (1.1.9)

$$A_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) P_{n+1}^*(\lambda; t),$$

$$B_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) \quad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

где  $(P_n(\lambda; t))_{n=0}^{\infty}$  — система полиномов, построенная посредством псевдоортогонализации степеней  $1, \lambda, \lambda^2, \dots$  относительно меры  $d\varrho(\lambda; t)$ .

Доказательство. Пусть  $(A_n(t), B_n(t))_{n=0}^{\infty}$  — решение системы (2.1.26), удовлетворяющее условию (2.1.14). Тогда соответствующая операторная якобиева матрица  $L(t)$  является решением уравнения Лакса (2.1.1) и, как было показано в п.2, операторная спектральная мера  $d\varrho(\lambda, t)$ , отвечающая  $L(t)$ , эволюционирует согласно (2.1.19). При этом, благодаря условию (2.1.24),

уравнение (2.1.19) выглядит следующим образом:

$$2d\dot{g}(\lambda; t) = (\lambda 1 - B_0(t))dg(\lambda; t) + dg(\lambda; t)(\lambda 1 - B_0(t)). \quad (2.1.29)$$

(то линейное уравнение первого порядка, содержащее неизвестную оператор-функцию  $B_0(t)$ ). Его решение можно найти, воспользовавшись самосопряженностью  $B_0(t)$  и свойствами операторной спектральной меры. В самом деле, из (2.1.29) следует, что

$$dg(\lambda; t) = X(t)e^{\lambda t}dg(\lambda; 0)X^*(t),$$

где  $X(t)$  - решение уравнения  $\dot{X}(t) = -\frac{1}{2}B_0(t)X(t)$ ,

$X(0) = 1$ . Из условия  $\int_{-\infty}^{\infty} dg(\lambda; t) = 1$  можно заключить,

что

$$1 = X(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} dg(\lambda; 0) X^*(t)$$

или

$$X^*(t)X(t) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} dg(\lambda; 0) \right)^{-1} = F(t)^{-1}.$$

Кроме того, так как  $B_0(t) = B_0^*(t)$ , то  $\dot{X}(t)X^{-1}(t) = -(X^*(t))^{-1}(X^*(t))^*$ . Поэтому  $\dot{X}(t) = (X^*(t))^{-1}(X^*(t))^* X(t) =$

$$= X(t)F(t)(F^{-1}(t)X^{-1}(t))^* X(t) = -X(t)\dot{F}(t)F^{-1}(t) - \dot{X}(t),$$

то есть  $X(t)$  является решением уравнения (2.1.28)

$$\dot{X}(t) = -\frac{1}{2}X(t)\dot{F}(t)F^{-1}(t).$$

Таким образом, мы показали, что если  $A_n(t), B_n(t) (n \in \mathbb{Z}_+)$  являются решениями системы (2.1.25), (2.1.26), то эволюция спектральной меры  $dg(\lambda; t)$  задается уравнениями (2.1.27), (2.1.28).

Теперь нам необходимо доказать, что верно и обратное: если спектральная мера  $d\varrho(\lambda; t)$  эволюционирует согласно уравнению (2.1.29) (или, что эквивалентно, (2.1.27), (2.1.28)), то восстановленные по формулам (1.1.9) оператор-функции  $A_n(t)$ ,  $B_n(t)$  являются решениями системы (2.1.25), (2.1.26).

Прежде всего отметим, что если  $d\varrho(\lambda; 0)$  — спектральная мера, отвечающая  $L(0)$ , то для любого  $t$  мера  $d\varrho(\lambda; t)$  найденная из (2.1.27), (2.1.28), удовлетворяет условиям, необходимым для разрешения обратной задачи спектрального анализа, описанной в п. I § 1.1. Действительно, существование интегралов (1.1.5) для меры  $d\varrho(\lambda; t)$  очевидно. Чтобы проверить условие (1.1.6) рассмотрим производную по  $t$  функции  $\int_{-\infty}^{\infty} d\varrho(\lambda; t)$ :

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\varrho(\lambda; t) \right)' &= \dot{X} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\varrho(\lambda; 0) X^* + X \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\dot{\varrho}(\lambda; 0) X^* + \\ &+ X \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{\lambda t} d\varrho(\lambda; 0) X^* = -\frac{1}{2} X(\dot{F}F^{-1}F + FF^{-1}\dot{F})X^* + X\dot{F}X^* = 0, \end{aligned}$$

откуда и следует, что  $\int_{-\infty}^{\infty} d\varrho(\lambda; t) = 1$  ( $\forall t \in [0, \infty)$ ).

Кроме того, если  $P(\lambda)$  — операторный полином с обратимым старшим коэффициентом, то полином  $P(\lambda) X(t)$  обладает тем же свойством, и оператор

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda) X(t) e^{\lambda t} d\varrho(\lambda; 0) X^*(t) P^*(\lambda) &\geq e^{-\|L(0)\|t} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda) X(t) d\varrho(\lambda; 0) X^*(t) P^*(\lambda) \end{aligned}$$

обратим в силу свойств меры  $d\varrho(\lambda, 0)$ . (Мы воспользовались тем, что носитель спектральной меры ограниченного оператора  $L(0)$



является подмножеством интервала  $[-\|L(0)\|, \|L(0)\|]$ . [page 74]

Заметим также, что уравнение для  $A_n$  системы (2.1.26) эквивалентно уравнению

$$(A_n^2)' = A_n B_{n+1} A_n + \frac{1}{2} A_n^2 (\Psi_n - B_n) - \frac{1}{2} (\Psi_n + B_n) A_n^2. \quad (2.1.30)$$

В самом деле, из (2.1.25) следует, что

$$\dot{A}_n = \frac{1}{2} A_n (\Psi_{n+1} + B_{n+1}) - \frac{1}{2} (\Psi_n + B_n) A_n = \frac{1}{2} A_n (\Psi_n - B_n) - \frac{1}{2} (\Psi_{n+1} - B_{n+1}) A_n.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} (A_n^2)' &= A_n \dot{A}_n + \dot{A}_n A_n = \frac{1}{2} A_n (A_n (\Psi_n - B_n) - (\Psi_{n+1} - B_{n+1}) A_n + \\ &+ \frac{1}{2} (A_n (\Psi_{n+1} + B_{n+1}) - (\Psi_n + B_n) A_n) A_n = A_n B_{n+1} A_n + \\ &+ \frac{1}{2} A_n^2 (\Psi_n - B_n) - \frac{1}{2} (\Psi_n + B_n) A_n^2. \end{aligned}$$

Обратно, из (2.1.30) следует уравнение для  $A_n$  в (2.1.26) в силу (2.1.25) и положительности  $A_n$ .

Итак, путь выполняется (2.1.29). Обозначим через

$$S_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n 1 d\rho(\lambda; t) \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \quad (2.1.31)$$

моменты меры  $d\rho(\lambda; t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{S}_n(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n (\lambda 1 - B_0(t)) d\rho(\lambda; t) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda; t) \lambda^n \times \\ &\times (\lambda 1 - B_0(t)) = S_{n+1}(t) - \frac{1}{2} (B_0(t) S_n(t) + S_n(t) B_0(t)). \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

Из (1.1.9) следует, что

$$B_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_0(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_0^*(\lambda; t) = S_1(t),$$

поэтому  $\dot{B}_0(t) = S_2(t) - S_1^2(t)$ . С другой стороны, напомним (1.1.10)

$$A_n^2(t) = N_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{n+1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) S_{n+1}^*(\lambda; t),$$

В частности,

$$\begin{aligned} A_0^2(t) &= N_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda 1 - S_1(t)) d\rho(\lambda; t) (\lambda 1 - S_1(t)) = \\ &= S_2(t) - S_1^2(t). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\dot{B}_0(t) = A_0^2(t) = A_0^2(t) - A_{-1}^2(t) + \frac{1}{2} [B_0(t), \Psi_0(t)].$$

Так как

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_1(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_1^*(\lambda; t) = \\ &= N_1^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda (\lambda 1 - S_1) d\rho(\lambda; t) (\lambda 1 - S_1) N_1^{-\frac{1}{2}} = \\ &= N_1^{-\frac{1}{2}} (S_3 - S_1 S_2 - S_2 S_1 + S_1^3) N_1^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} (A_0^2)^{\cdot} &= \dot{N}_1 = (S_2 - S_1^2)^{\cdot} = S_3 - \frac{1}{2} S_2 S_1 - \frac{1}{2} S_1 S_2 - (S_2 - S_1^2) S_1 - \\ &- S_1 (S_2 - S_1^2) = (S_3 - S_1 S_2 - S_2 S_1 + S_1^3) - \frac{1}{2} (S_2 - S_1^2) S_1 - \frac{1}{2} S_1 (S_2 - S_1^2) = \\ &= A_0 B_1 A_0 + \frac{1}{2} A_0^2 (\Psi_0 - B_0) - \frac{1}{2} (\Psi_0 + B_0) A_0^2. \end{aligned}$$

Мы показали, что для  $B_0(t), A_0(t)$  выполняются уравнения системы (2.1.26). Предположим теперь, что уравнения 2.1.23) справедливы для  $A_j(t), B_j(t)$  при всех значениях  $j$ , не превосходящих  $n-1$ .

Установим некоторые вспомогательные соотношения.

Лемма 2.1.2. При наших предположениях справедливы следующие соотношения:

$$1. (A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1})^* = (N_n^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}})^* =$$

$$= \frac{1}{2} (N_n^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}} B_0 - (\Psi_n + B_n) N_n^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}};$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) =$$

$$= -A_{n-1} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t);$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_{n+1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t);$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) =$$

$$= \frac{1}{2} (-(\Psi_n + B_n) + \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t));$$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_{n+1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_{n+1}^*(\lambda; t) = -\frac{1}{2} A_n (\Psi_n + B_n) A_n^{-1} +$$

$$+ \dot{A}_n A_n^{-1} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_{n+1}^*(\lambda; t).$$

(Соотношение 5 отличается от соотношения 4, так как по предположению индукции мы еще не проверили справедливости уравнений системы (2.I.26) для  $A_n, B_n$ .)

Доказательство. I. Из (2.I.25), (2.I.26) следует, что

$$(A_j^{-1})^* = \frac{1}{2} A_j^{-1} (\Psi_j + B_j) - \frac{1}{2} (\Psi_j + B_j) A_j^{-1} = \frac{1}{2} A_j^{-1} (\Psi_{j+1} - B_{j+1}) - \frac{1}{2} (\Psi_j - B_j) A_j^{-1}$$

( $j=0, \dots, n-1$ ) Тогда

$$\begin{aligned} (A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1})^* &= \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-1}^{-1} \dots A_{j+1}^{-1} \cdot \frac{1}{2} (A_j^{-1} (\Psi_j + B_j) - (B_{j+1} + \Psi_{j+1}) A_j^{-1}) \times \\ &\times A_{j-1}^{-1} \dots A_0^{-1} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-1}^{-1} \dots A_j^{-1} (\Psi_j + B_j) A_{j-1}^{-1} \dots A_0^{-1} - (B_n + \Psi_n) A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} - \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^{n-1} A_{n-1}^{-1} \dots A_j^{-1} (\Psi_j + B_j) A_{j-1}^{-1} \dots A_0^{-1} \right) = \frac{1}{2} (N_n^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}} B_0 - (\Psi_n + B_n) N_n^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

При доказательстве соотношений 2-5 будет использоваться тот факт, что если  $(P_n(\lambda; t))_{n=0}^{\infty}$  - система полиномов, полученная псевдоортогонализацией последовательности  $1, \lambda 1, \lambda^2 1, \dots$  относительно меры  $d\varrho(\lambda; t)$ , то в силу соотношений псевдоортогональности (I.I.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) Q_k(\lambda) = 0$$

для любого операторного полинома  $Q_k(\lambda)$  степени  $k < n$ .

В частности,  $\int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) \dot{P}_{n-1}^*(\lambda; t) = 0$ , поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) \right)^* - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) d\dot{\varrho}(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda; t) d\varrho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) B_0 d\varrho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t). \end{aligned}$$

Из формул (I.I.9) следует, что первое слагаемое равно  $A_{n-1}(t)$ , что и доказывает равенство 2.

Аналогично,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_{n+1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) \right) - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) = - \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) \times \\ &\times \lambda P_{n-1}^*(\lambda; t) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t). \end{aligned}$$

Для доказательства 4 напомним, что

$$P_n(\lambda; t) = N_n^{-\frac{1}{2}} S_n(\lambda; t) = N_n^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}} \lambda^n + Q_{n-1}(\lambda; t),$$

где степень многочлена  $Q_{n-1}(\lambda; t)$  не превосходит  $n-1$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) &= \left( N_n^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) = \\ &= \left( N_n^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}} \right) \left( N_1^{\frac{1}{2}} \dots N_n^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Используя равенство I, последнее выражение можно переписать в виде

$$-\frac{1}{2}(\Psi_n + B_n) + \frac{1}{2} N_n^{-\frac{1}{2}} N_{n-1}^{-\frac{1}{2}} B_0 N_1^{\frac{1}{2}} \dots N_n^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\Psi_n + B_n) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} N_n^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}} \lambda^n B_0 d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) = \frac{1}{2} (\Psi_n - B_n) + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) B_0(t) d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t),
\end{aligned}$$

что и доказывает соотношение 4.

Совершенно аналогично

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_{n+1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_{n+1}^*(\lambda; t) = (N_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \dots N_1^{-\frac{1}{2}})^* (N_1^{\frac{1}{2}} \dots N_{n+1}^{\frac{1}{2}}) = \\
& = (N_{n+1}^{-\frac{1}{2}})^* N_{n+1}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} N_{n+1}^{-\frac{1}{2}} N_1^{-\frac{1}{2}} B_0 N_1^{\frac{1}{2}} \dots N_{n+1}^{\frac{1}{2}} - \\
& - \frac{1}{2} N_{n+1}^{-\frac{1}{2}} (\Psi_n + B_n) N_{n+1}^{\frac{1}{2}} = \dot{A}_n A_n^{-1} - \frac{1}{2} A_n (\Psi_n + B_n) A_n^{-1} + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_{n+1}^*(\lambda; t). \blacksquare
\end{aligned}$$

Теперь мы можем рассмотреть эволюцию  $A_n(t)$  и  $B_n(t)$ :

$$\begin{aligned}
\dot{B}_n(t) &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) \right)^* = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) \lambda P_n^*(\lambda; t) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda; t) \times \\
&\times (\lambda 1 - B_0) d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) \times \\
&\times (\lambda 1 - B_0) P_n^*(\lambda; t) + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) \dot{P}_n^*(\lambda; t).
\end{aligned}$$

Напомним, что для полиномов  $P_n(\lambda; t)$  справедливы рекуррентные соотношения (2.1.17). Учитывая их и (1.1.7), мы получим

$$\begin{aligned}
\dot{B}_n = & \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) A_{n-1} + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) \times \\
& \times P_n^*(\lambda; t) B_n - \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^*(\lambda; t) A_{n-1} + \right. \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) B_n + A_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) \times \\
& \times B_0 P_n^*(\lambda; t) + B_n \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) B_0 P_n^*(\lambda; t) \left. \right] + A_{n-1}^2 + B_n^2 + A_n^2 + \\
& + A_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) \dot{P}_n^*(\lambda; t) + B_n \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) \dot{P}_n^*(\lambda; t).
\end{aligned}$$

Теперь можно воспользоваться соотношениями 2 и 4 леммы 2.1.2, в результате получим

$$\begin{aligned}
\dot{B}_n = & A_{n-1}^2 + B_n^2 + A_n^2 - 2A_{n-1}^2 - \frac{1}{2} (\Psi_n + B_n) B_n + \frac{1}{2} B_n (\Psi_n - B_n) = \\
= & A_n^2 - A_{n-1}^2 + \frac{1}{2} [B_n, \Psi_n].
\end{aligned}$$

После аналогичных преобразований для мы приходим  
к равенству

$$\begin{aligned}
\dot{A}_n = & \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) A_n + A_n \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) \times \\
& d\rho(\lambda; t) \dot{P}_{n+1}^*(\lambda; t) + A_n B_{n+1} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) A_n - \\
& - \frac{1}{2} A_n \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t) d\rho(\lambda; t) B_0 P_{n+1}^*(\lambda; t).
\end{aligned}$$

Учитывая соотношения 4,5 леммы 2.1.2, перепишем последнее выражение

$$\dot{A}_n = -\frac{1}{2}(\Psi_n + B_n)A_n + B_{n+1}A_n + \frac{1}{2}A_n^2(\Psi_n - B_n)A_n^{-1} - A_n\dot{A}_nA_n^{-1}.$$

Домножим обе части справа на  $A_n$ :

$$A_n\dot{A}_n + \dot{A}_nA_n = (\dot{A}_n^2) = A_nB_{n+1}A_n + \frac{1}{2}A_n^2(\Psi_n - B_n) - \frac{1}{2}(\Psi_n - B_n)A_n^2,$$

то есть справедливо уравнение (2.1.30), а следовательно, функции  $A_n(t), B_n(t)$ , восстановленные при помощи формул (1.1.9) по спектральной мере  $d\rho(\lambda; t)$ , удовлетворяющей (2.1.29), являются решениями системы (2.1.25), (2.1.26). Теорема 2.1.1 полностью доказана. ■

4. В работах [25, 42] рассматривалась неабелева цепочка Тоды вида

$$\dot{D}_n(t) = C_n(t) - C_{n-1}(t), \dot{C}_n(t) = C_n(t)D_{n+1}(t) - D_n(t)C_n(t) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

и эквивалентная ей система уравнений

$$\frac{d}{dt}(G_n^{-1}\dot{G}_n) = G_n^{-1}G_{n+1} - G_{n-1}^{-1}G_n \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Мы рассмотрим ограничения этих систем на полуось

$$\begin{aligned} \dot{D}_n(t) &= C_n(t) - C_{n-1}(t), \dot{C}_n(t) = C_n(t)D_{n+1}(t) - D_n(t)C_n(t) \\ (n \in \mathbb{Z}_+; C_{-1} &\equiv 0) \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

и

$$\frac{d}{dt}(G_n^{-1}\dot{G}_n) = G_n^{-1}G_{n+1} - G_{n-1}^{-1}G_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

(2.1.34)

$$\frac{d}{dt}(G_0^{-1}\dot{G}_0) = G_0^{-1}G_1.$$

Эквивалентность систем (2.1.33) и (2.1.34) устанавливается заменой

$$C_n(t) = G_n^{-1}(t)G_{n+1}(t), D_n(t) = G_n^{-1}(t)\dot{G}_n(t). \quad (2.1.35)$$



Действительно, дифференцируя (2.1.35) в силу (2.1.34), получим

$$\dot{D}_n = \frac{d}{dt}(G_n^{-1} \dot{G}_n) = C_n - C_{n-1}, \quad \dot{C}_n = -G_n^{-1} \dot{G}_n G_n^{-1} G_{n+1} + \\ + G_n^{-1} \dot{G}_{n+1} = C_n D_{n+1} - D_n C_n \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

В данном пункте будет показано, как при помощи решений цепочки (2.1.26) строить решения специального вида систем (2.1.33), (2.1.34).

Пусть  $(G_n(t))_{n=0}^\infty$  — решение системы (2.1.34), а  $X(t)$  — решение линейного уравнения

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{2} X(t) G_0^{-1}(t) \dot{G}_0(t) X^{-1}(t), \quad X(0) = 1 \quad (2.1.36)$$

Предположим, что выполняется следующее условие:

Для любого  $t \geq 0$  оператор  $X(t) G_0^{-1}(t) \dot{G}_0(t) X^{-1}(t)$  самосопряжен, а операторы  $X(t) G_0^{-1}(t) G_n(t) X^{-1}(t) (n \in \mathbb{N})$  (2.1.37) положительны.

Тогда справедлива

**Теорема 2.1.2.** Между решениями системы (2.1.34), удовлетворяющими условию (2.1.37) и решениями системы (2.1.25), (2.1.26) существует взаимно однозначное соответствие, которое задается соотношениями

$$G_{n+1}(t) = G_0(t) X^{-1}(t) A_0(t) \dots A_{n-1}(t) A_n^2(t) A_{n-1} \dots A_0(t) X(t), \\ \dot{G}_n(t) = G_0(t) X^{-1}(t) A_0(t) \dots A_{n-1}(t) \dot{B}_n(t) A_{n-1}(t) \dots A_0(t) X(t) \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad (2.1.38) \\ \dot{X}(t) = \frac{1}{2} B_0(t) X(t).$$

**Доказательство.** Рассмотрим решение системы (2.1.26) —

$$(A_n(t), B_n(t))_{n=0}^\infty. \text{ Сделаем замену}$$

$$D_n(t) = X^{-1}(t) A_0^{-1}(t) \dots A_{n-1}^{-1}(t) B_n(t) A_{n-1}(t) \dots A_0(t) X(t),$$

$$C_n(t) = X^{-1}(t) A_0^{-1}(t) \dots A_{n-1}^{-1}(t) A_n^2(t) A_{n-1}(t) \dots A_0(t) X(t), \quad (2.1.39)$$

где  $\dot{X}(t) = \frac{1}{2} B_0(t) X(t)$ . Тогда для того, чтобы найти уравнения, согласно которым эволюционирует  $C_n(t)$ ,  $D_n(t)$ , мы можем воспользоваться соотношением I леммы 2.1.1. Именно,

$$\begin{aligned} \dot{D}_n = & -\frac{1}{2} X^{-1} B_0 X D_n + \frac{1}{2} D_n X^{-1} B_0 X + \frac{1}{2} X^{-1} (B_0 A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} + \\ & + A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} (\Psi_n - B_n)) B_n A_{n-1} \dots A_0 X - \frac{1}{2} X^{-1} A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} B_n \times \\ & \times ((\Psi_n - B_n) A_{n-1} \dots A_0 + A_{n-1} \dots A_0 B_n) X + X^{-1} A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} (A_n^2 - A_{n-1}^2 + \\ & + \frac{1}{2} [B_n, \Psi_n]) A_{n-1} \dots A_0 X = C_n - C_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}), \\ \dot{D}_0 = & C_0 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \dot{C}_n = & -\frac{1}{2} X^{-1} B_0 X C_n + \frac{1}{2} C_n X^{-1} B_0 X + \frac{1}{2} X^{-1} (B_0 A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} + \\ & + A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} (\Psi_n - B_n)) A_n^2 \dots A_0 X - \frac{1}{2} X^{-1} \dots A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} A_n \times \\ & \times ((\Psi_{n+1} - B_{n+1}) A_n \dots A_0 + A_n \dots A_0 B_n) X + \\ & + X^{-1} A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} (\frac{1}{2} A_n (\Psi_{n+1} + B_{n+1}) - \frac{1}{2} (\Psi_n + B_n) A_n) \times \\ & \times A_n \dots A_0 X = X^{-1} A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} A_n^2 A_n^{-1} B_{n+1} A_n \dots A_0 X - \\ & - X^{-1} A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} B_n A_n^2 A_{n-1} \dots A_0 X = C_n D_{n+1} - D_n C_n \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \end{aligned}$$

Таким образом, оператор-функции (2.1.39) являются решениями системы (2.1.33). Тогда функции  $G_n(t)$ , связанные с  $C_n(t)$ ,

$D_n(t)$  соотношениями (2.1.35) будут решениями системы (2.1.34), причем

$$G_{n+1} = G_0 C_0 \dots C_{n-1} C_n = G_0 X^{-1} A_0 \dots A_{n-1} A_n^2 A_{n-1} \dots A_0 X,$$

$$\dot{G}_n = G_0 C_0 \dots C_{n-1} D_n = G_0 X^{-1} A_0 \dots A_{n-1} B_n A_{n-1} \dots A_0 X \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$a \quad \dot{G}_0 = G_0 X^{-1} B_0 X = 2G_0 X^{-1} \dot{X} \quad , \text{ то есть выполняется уравнение (2.1.36).}$$

Обратно, предположим, что  $(G_n(t))_{n=0}^{\infty}$  - решение системы (2.1.34), удовлетворяющее условию (2.1.37). Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= X(t) G_0^{-1}(t) G_{n+1}(t) X^{-1}(t) \\ \beta_n(t) &= X(t) G_0^{-1}(t) G_n(t) X^{-1}(t) \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_n &= \frac{1}{2} X G_0^{-1} \dot{G}_0 G_0^{-1} G_{n+1} X^{-1} - \frac{1}{2} X G_0^{-1} G_{n+1} G_0^{-1} \times \\ &\times \dot{G}_0 X^{-1} - X G_0^{-1} \dot{G}_0 G_0^{-1} G_{n+1} X^{-1} + X G_0^{-1} \dot{G}_{n+1} X^{-1} = \beta_{n+1} - \\ &- \frac{1}{2} (X G_0^{-1} \dot{G}_0 X^{-1} X G_0 G_{n+1} X^{-1} + X G_0^{-1} G_{n+1} X^{-1} G_0^{-1} \times \\ &\times \dot{G}_0 X^{-1}) = \beta_{n+1} - \frac{1}{2} (\beta_0 \alpha_n + \alpha_n \beta_0). \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

Отсюда и из условия (2.1.37) следует, что операторы

$$\beta_n = \alpha_{n+1} + \frac{1}{2} (\beta_0 \alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} \beta_0) \quad \text{самосопряжены при } n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$A_0(t) = \alpha_0^{\frac{1}{2}}(t), \quad B_0(t) = \beta_0(t),$$

$$A_n(t) = (A_{n-1}^{-1}(t) \dots A_0^{-1}(t) \alpha_n(t) A_0^{-1}(t) \dots A_{n-1}^{-1}(t))^{\frac{1}{2}},$$

$$B_n(t) = A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} \beta_n(t) A_0^{-1}(t) \dots A_{n-1}^{-1}(t) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2.1.42)$$

Очевидно, что операторы  $A_n(t)$  - положительны, а  $B_n(t)$  - самосопряжены. Рассмотрим

$$\dot{B}_0 = \dot{\beta}_0 = \frac{1}{2} \beta_0^2 + X G_0^{-1} G_1 X^{-1} - \frac{1}{2} \beta_0^2 = A_0^2.$$

[page 85]

В силу положительности  $A_0(t)$  существует единственный оператор  $\Psi_1(t)$  такой, что  $A_0 \Psi_1 + \Psi_1 A_0 = [B_1 + B_0, A_0]$ .

Тогда

$$(B_1 - \Psi_1) A_0 - A_0 B_0 = A_0 (B_1 + \Psi_1) - B_0 A_0$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } \dot{A}_0 &= (A_0 \dot{A}_0 + \dot{A}_0 A_0) = \beta_1 - \frac{1}{2} (\beta_0 \alpha_0 + \alpha_0 \beta_0) = \\ &= A_0 B_1 A_0 - \frac{1}{2} (B_0 A_0^2 + A_0^2 B_0) = \frac{1}{2} A_0 ((B_1 - \Psi_1) A_0 - \\ &- A_0 B_0) + \frac{1}{2} (A_0 (B_1 + \Psi_1) - B_0 A_0) A_0, \end{aligned}$$

мы получим  $\dot{A}_0 = A_0 (B_1 + \Psi_1) - B_0 A_0$ . Таким образом, мы проверили выполнение (2.1.25), (2.1.26) при  $n=0$ .

Предположим, что  $B_k(t)$ ,  $A_k(t)$  удовлетворяют уравнениям системы (2.1.26) при  $k \leq n-1$  и пусть  $\Psi_{k+1}(t)$  - решение операторного уравнения

$$A_k (\Psi_{k+1} - \Psi_k) + (\Psi_{k+1} - \Psi_k) A_k = [B_{k+1} + B_k, A_k]$$

при  $k=1, \dots, n$ . Тогда, учитывая соотношение I леммы 2.1.2, получаем

$$\begin{aligned} \dot{B}_n &= -\frac{1}{2} (B_n + \Psi_n) B_n + \frac{1}{2} B_n (\Psi_n - B_n) + \frac{1}{2} A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} (B_0 \beta_n + \\ &+ \beta_n B_0) A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} \dot{\beta}_n A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Но

$$\dot{\beta}_n = -\frac{1}{2} (B_0 \beta_n + \beta_n B_0) + \alpha_n - \alpha_{n-1} \alpha_{n-2}^{-1} + \beta_n \alpha_{n-1}^{-1} \beta_n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{B}_n &= \frac{1}{2} [B_n, \Psi_n] - B_n^2 + A_n^2 - A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} \alpha_{n-1} \alpha_{n-2}^{-1} \alpha_{n-1} \times \\ &\times A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} \beta_n \alpha_{n+1}^{-1} \beta_n A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [B_n, \psi_n] - B_n^2 + A_n^2 - A_{n-1}^{-1} A_{n-1}^2 A_{n-2} A_{n-2}^{-1} A_{n-2}^2 A_{n-1}^{-1} \quad \text{[page 86]}$$

$$+ B_n A_{n-1} A_{n-1}^{-2} A_{n-1} B_n = A_n^2 - A_{n-1}^2 + \frac{1}{2} [B_n, \psi_n].$$

Аналогично,  $(A_n^2)^* = -\frac{1}{2} (\psi_n + B_n) A_n^2 - \frac{1}{2} A_n^2 (B_n - \psi_n) +$   
 $+ \frac{1}{2} A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} (\beta_0 A_n + A_n \beta_0) A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1} (\beta_{n+1} -$   
 $- \frac{1}{2} (B_0 \alpha_n + \alpha_n B_0)) A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} = A_n B_{n+1} A_n - \frac{1}{2} (B_n + \psi_n) A_n^2 -$   
 $- \frac{1}{2} A_n^2 (B_n - \psi_n) = \frac{1}{2} A_n ((B_{n+1} - \psi_{n+1}) A_n - A_n (B_n - \psi_n)) +$   
 $+ \frac{1}{2} (A_n (B_{n+1} + \psi_{n+1}) - (B_n + \psi_n) A_n) A_n,$

откуда следует, что

$$\dot{A}_n = \frac{1}{2} (A_n (B_{n+1} + \psi_{n+1}) - (B_n + \psi_n) A_n).$$

Мы показали, что оператор-функции (2.1.42) являются решениями системы (2.1.26). При этом

$$G_{n+1} = G_0 X^{-1} \alpha_n X = G_0^{-1} X^{-1} A_0 \dots A_{n-1} A_n^2 A_{n-1} \dots A_0 X,$$

$$\dot{G}_n = G_0 X^{-1} A_0 \dots A_{n-1} B_n A_{n-1} \dots A_0 X \quad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

$$\dot{X} = \frac{1}{2} X G_0 \dot{G}_0 X^{-1} X = \frac{1}{2} B_0 X,$$

что и требовалось доказать. ■

5. В этом пункте мы применим результаты пп. I-3 к потокам Тоды, связанным с самосопряженными конечнодиагональными операторами ([43]). Пусть  $\tilde{L}$  - конечнодиагональный самосопряженный ограниченный оператор в  $\ell_2$ , порожденный разностным выражением

$$(\tilde{L}u)_n = C_{0n}u_n + \sum_{k=1}^N (C_{k,n-k}u_{n-k} + C_{kn}u_{n+k}) \quad (2.1.43)$$

$(u = (u_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_2, c_{kj} = 0 \text{ при } j < 0; c_{nj} > 0 \text{ при } |n-j| = N)$ . Предположим, что оператор  $\tilde{L}$  гладким образом зависит от времени  $t$  и эволюционирует согласно уравнению Лакса

$$\dot{\tilde{L}} = [\tilde{L}, \tilde{A}], \quad (2.1.44)$$

где

$$(A\tilde{u})_n = \sum_{k=1}^N (c_{k,n-k} u_{n-k} - c_{kn} u_{n+k}). \quad (2.1.45)$$

Уравнение (2.1.44) является частным случаем потоков Тоды, изученных в [43].

Прежде всего отметим, что операторы  $\tilde{L}$  и  $\tilde{A}$  могут быть записаны как блочно-трехдиагональные матрицы с блоками  $N \times N$ :

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} B_0 & \tilde{A}_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \tilde{A}_0^* & \tilde{B}_1 & \tilde{A}_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{A}_1^* & \tilde{B}_2 & \tilde{A}_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} D_0 & -\tilde{A}_0 & 0 & 0 & \dots \\ \tilde{A}_0^* & D_1 & -\tilde{A}_1 & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{A}_1^* & D_2 & -\tilde{A}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.1.46)$$

где  $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, D_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) (n \in \mathbb{Z}_+)$ . Разбиение на блоки  $\tilde{L}$  осуществляется следующим образом

$$\tilde{L} = \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} C_{00} & \dots & C_{N-1,0} & C_{N0} & 0 & \dots & 0 \\ C_{10} & \dots & C_{N-2,1} & C_{N-1,1} & C_{N1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{N-10} & & C_{0,N-1} & C_{1,N-1} & C_{2,N-1} & \dots & C_{N,N-1} & \\ \hline C_{N0} & \dots & C_{1,N-1} & & & & & \\ 0 & C_{N-1} & \dots & C_{2,N-1} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & C_{N,N-1} & & & & \\ \hline & & 0 & & & & & \end{array} \right)$$

Записывая (2.I.46) по коэффициентам, мы получим

$$\tilde{B}_n = (b_{jk}^n)_{j,k=0}^{N-1}, \quad b_{jk}^n = C_{|j-k|, nN + \max(j,k)}$$

$$\tilde{A}_n = (a_{jk}^n)_{j,k=0}^{N-1}, \quad a_{jk}^n = \begin{cases} C_{N-j, nN+k}, & j \geq k \\ 0, & j < k \end{cases}$$

(2.I.47)

$$D_n = (d_{jk}^n)_{j,k=0}^{N-1}, \quad d_{jk}^n = \text{sign}(j-k) b_{jk}^n,$$

$$\text{где } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Подставляя (2.I.46) в (2.I.44) легко убедиться, что уравнение (2.I.44) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\tilde{B}_n &= 2(\tilde{A}_n \tilde{A}_n^* - \tilde{A}_{n-1}^* \tilde{A}_{n-1}) + [\tilde{B}_n, D_n], \\ \dot{\tilde{A}}_n &= \tilde{A}_n(\tilde{B}_{n+1} + D_{n+1}) - (\tilde{B}_n + D_n)\tilde{A}_n \quad (\tilde{A}_1 = 0, n \in \mathbb{Z}_+). \quad (2.1.48)\end{aligned}$$

Для любого  $n \geq 0$  справедливо представление  $\tilde{A}_n(t)$  в виде  $\tilde{A}_n(t) = C_n(t) V_n(t)$ , где  $C_n(t) > 0$ , а  $V_n(t)$  - унитарная матрица. Положим

$$\begin{aligned}U_0(t) &= 1, U_{n+1}(t) = V_0(t) \dots V_n(t), \\ U(t) &= \text{diag}(U_0(t), U_1(t), \dots) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.1.49)\end{aligned}$$

и сделаем замену

$$L(t) = U(t) \tilde{L}(t) U^{-1}(t). \quad (2.1.50)$$

Тогда уравнение (2.1.44) перейдет в эквивалентное ему

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \dot{U} \tilde{L} U^{-1} + U [\tilde{L}, \tilde{A}] U^{-1} - U \tilde{L} U^{-1} \dot{U} U^{-1} = \\ &= [L, U \tilde{A} U^{-1} - \dot{U} U^{-1}] = [L, A],\end{aligned} \quad (2.1.51)$$

где  $L(t)$  - блочно-трехдиагональный самосопряженный оператор, причем его внедиагональные элементы

$$\begin{aligned}A_n(t) &= U_n(t) \tilde{A}_n(t) U_{n+1}^{-1}(t) = U_n(t) \tilde{A}_n(t) V_n^{-1}(t) U_n^{-1}(t) = \\ &= U_n(t) C_n(t) U_n^{-1}(t)\end{aligned}$$

положительны. Из (2.1.46) следует, что операторы  $L(t)$  и

$A(t)$  имеют вид (2.1.2), причем  $\Phi_0(t) = -\Psi_0(t) = A_0(t)$ ,  $B_0(t) = \tilde{B}_0(t)$ ,  $\Psi_0(t) = D_0(t)$ . Так же как в случае (2.1.24) из (2.1.3) - (2.1.5) получаем, что уравнение (2.1.51) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\dot{B}_n &= 2(A_n^2 - A_{n-1}^2) + [B_n, \Psi_n] \\ \dot{A}_n &= A_n(\Psi_{n+1} + B_{n+1}) - (\Psi_n + B_n)A_n\end{aligned} \quad (2.1.52)$$



$(n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1} = 0)$ , где  $\Psi_n (n \in \mathbb{N})$  - решение уравнения (2.1.25)

$$A_n \Psi_{n+1} + \Psi_{n+1} A_n = A_n \Psi_n + \Psi_n A_n + [B_{n+1} + B_n, A_n],$$

а  $\Psi_0(t) = D_0(t)$ . Как следует из леммы 2.1.1 уравнение эволюции операторной спектральной меры  $d\rho(\lambda; t)$ , соответствующей решению  $L(t)$  уравнения (2.1.51) имеет вид

$$d\rho(\lambda; t) = \lambda \mathbb{1} - (B_0(t) + \Psi_0(t)) d\rho(\lambda; t) + d\rho(\lambda; t) (\lambda \mathbb{1} - (B_0(t) - \Psi_0(t))). \quad (2.1.53)$$

Из (2.1.47) следует, что матрица  $B_0(t) + \Psi_0(t)$  нижнетреугольная и что  $(B_0(t) + \Psi_0(t))^* = (B_0(t) - \Psi_0(t))$ . Решение уравнения (2.1.53) может быть записано в виде

$$d\rho(\lambda; t) = X(t) e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0) X^*(t),$$

где  $X(t)$  - решение уравнения  $\dot{X}(t) = -(B_0(t) + \Psi_0(t))X(t)$  с начальным условием  $X(0) = \mathbb{1}$ . В силу нижнетреугольности матрицы  $B_0(t) + \Psi_0(t)$ , матрица  $X(t)$  также является нижнетреугольной при любом  $t \geq 0$ . Кроме того, из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda; t) = \mathbb{1} \quad \text{следует, что}$$

$$X^*(t)X(t) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0) \right)^{-1} = F^{-1}(t),$$

откуда мы можем найти матрицу  $X(t)$ , учитывая нижнетреугольность и положительность диагональных элементов. Справедлива теорема, аналогичная теореме 2.1.1.

**Теорема 2.1.3.** Для произвольных ограниченных начальных данных  $\tilde{L}(0)$  существует и единственно решение задачи Коши в классе ограниченных операторов для уравнения (2.1.44). Процедура построения решения такова: по  $\tilde{L}(0)$  при помощи (2.1.49) строится операторная якобиева матрица  $L(0) = \mathcal{U}(0) \tilde{L}(0) \mathcal{U}^{-1}(0)$

и соответствующая ей спектральная мера  $d\rho(\lambda; 0)$ . Эволюция [page 91]  
меры задается формулой

$$d\rho(\lambda; t) = X(t) e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0) X^*(t), \quad (2.1.54)$$

где  $X(t)$  — нижнетреугольная с положительными диагональными элементами матрица, удовлетворяющая уравнению

$$X^*(t) X(t) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0) \right)^{-1}. \quad (2.1.55)$$

В произвольный момент времени  $t$  по  $d\rho(\lambda; t)$  восстанавливаются при помощи формул (1.1.9) коэффициенты операторной якобиевой матрицы  $L(t)$ . Тогда  $\tilde{L}(t) = U^{-1}(t) L(t) U(t)$ , где унитарный оператор  $U(t) = \text{diag}(1, U_1(t), U_2(t), \dots)$  однозначно определяется условием нижнетреугольности матриц  $\tilde{A}_n(t)$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ).

Доказательство. Мы уже показали справедливость формул (2.1.54), (2.1.55) для спектральной меры, соответствующей решению (2.1.52). Наоборот, пусть мера  $d\rho(\lambda; t)$  задается формулами (2.1.54), (2.1.55). Тогда матрицы  $\dot{X} X^{-1}$  и  $(X^*)^{-1} (\dot{X}^*)^*$  являются соответственно ниже- и верхнетреугольной. Кроме того,

$$\begin{aligned} \dot{X} X^{-1} + (X^*)^{-1} (\dot{X}^*)^* &= (X^*)^{-1} (X^* \dot{X})^* X^{-1} = -(X^*)^{-1} F^{-1} \dot{F} F^{-1} X^{-1} = \\ &= X \dot{F} X^* = X \int_{-\infty}^{\infty} 2\lambda e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0) X^* = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\rho(\lambda; t) = 2 B_0(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\dot{X} X^{-1} = -(B_0 + \Psi_0)$ , где  $\Psi_0 = -\Psi_0^*$ , а значит,

$$\begin{aligned} d\dot{\rho}(\lambda; t) &= 2\lambda d\rho(\lambda; t) + \dot{X} X^{-1} d\rho(\lambda; t) + d\rho(\lambda; t) (X^*)^{-1} (\dot{X}^*)^* = \\ &= (\lambda I - (B_0 + D_0)) d\rho(\lambda; t) + d\rho(\lambda; t) (\lambda I - (B_0 + D_0)), \end{aligned}$$

то есть справедливо уравнение (2.1.53). Отсюда, точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.1.1 можно вывести, что коэффициенты операторной яковиевой матрицы  $L(t)$ , восстановленной при помощи формул (1.1.9) по  $d\rho(\lambda; t)$ , являются решениями системы (2.1.52) или, что то же самое, справедливо уравнение Лакса (2.1.51).

Зададим теперь последовательность унитарных матриц  $(U_n(t))_{n=0}^{\infty}$  условиями:  $U_0(t)=1, \tilde{A}_n = U_n^{-1} A_n U_{n+1}$  - нижнетреугольная матрица ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) и рассмотрим  $\tilde{L}(t) = U^{-1}(t) L(t) U(t)$ , где  $U(t) = \text{diag}(U_0(t), U_1(t), \dots)$ . Тогда, очевидно, выполняется уравнение Лакса  $\dot{\tilde{L}}(t) = [\tilde{L}(t), \tilde{A}(t)]$  с  $\tilde{A}(t) = U^{-1}(t) A(t) U(t) + U^{-1} \dot{U}$  и матрицы  $\tilde{A}_n(t), \tilde{B}_n(t) = U_n^{-1}(t) B_n(t) U_n(t)$  являются решениями системы (2.1.48), где  $D_n(t) = U_n^{-1}(t) \psi_n(t) U_n(t) + U^{-1}(t) \dot{U}(t)$  - кососимметричные матрицы, так же как и  $\psi_n(t)$ . Нам осталось показать, что матрицы  $\tilde{B}_n(t) + D_n(t)$  нижнетреугольны, но это рекуррентно следует из уравнений для  $\tilde{A}_n$  системы (2.1.48) и нижнетреугольности матриц  $\tilde{A}_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_0$ ) и  $\tilde{B}_0 + D_0 = U_0^{-1}(B_0 + \psi_0) U_0 = B_0 + \psi_0$ . ■

Рекуррентные соотношения (2.2.7) позволяют восстановить  $C_{p,j}$  ( $0 \leq p \leq m$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ ) по  $C_p$  ( $0 \leq p \leq m$ ) и коэффициентам разностного выражения (2.2.1). Точно так же, при  $K-j = -\ell-1$  из (2.2.6) следует, что  $C_{-\ell,j} = A_{j-1} C_{-\ell,j-1} A_{j-\ell-1}^{-1}$  ( $j \geq \ell+1$ ), и далее, при  $K-j = -p-1$  ( $1 \leq p < \ell$ ),

$$C_{-p,j} = (A_{j-1} C_{-p,j-1} + B_j C_{-p-1,j} + C_{-p-2,j+1} - C_{-p-2,j} - C_{-p-1,j} B_{j-p-1}) A_{j-p-1}^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Таким образом, коэффициенты  $C_{-p,j}$  ( $1 \leq p \leq \ell$ ;  $j \geq p$ ) также могут быть рекуррентно восстановлены при помощи формул (2.2.8) по коэффициентам  $L(t)$  и  $C_p$  ( $1 \leq p \leq \ell$ ). ■

Если коэффициенты разностного выражения (2.2.3) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.2.7), (2.2.8), то уравнение Лакса эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{A}_n &= A_n C_{0,n} - C_{0,n+1} A_n + C_{-2,n+2} - C_{-2,n+1} + \\ &+ B_{n+1} C_{-1,n+1} - C_{-1,n+1} B_n, \\ \dot{B}_n &= A_{n-1} C_{1,n-1} - C_{1,n} A_n + C_{-1,n+1} - C_{-1,n} + [B_n, C_{0,n}], \\ &(n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1} = 0). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Предположим теперь, что  $L(t)$  является решением уравнения (2.2.2) и рассмотрим соответствующие  $L(t)$  обобщенную спектральную функцию  $R$  и последовательность моментов  $(S_n)_{n=0}^\infty$ , связанные соотношениями (1.2.8), (1.2.14). Выясним, как эволюционируют моменты  $S_n = (L^n)_{00}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Из уравнения Лакса следует, что

$$\begin{aligned} (L^n)' &= \sum_{k=0}^{n-1} L^k \dot{L} L^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} L^k [L, A] L^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} L^{k+1} A L^{n-k-1} - \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} L^k A L^{n-k} = [L^n, A]. \end{aligned}$$

Поэтому,  $\dot{S}_n = (L^n)_{00} = \sum_{k=0}^{\ell} (L^n)_{0k} C_{-k} - \sum_{j=0}^m C_j (L^n)_{j0}$ ,

где  $C_{-k}, C_j$  определены в (2.2.4). Воспользовавшись тем, что по лемме 1.2.1  $(L^n)_{0k} = R(\lambda^n 1, P_k^+(\lambda)), (L^n)_{j0} = R(P_j(\lambda), \lambda^n 1)$ ,

получим

$$\dot{S}_n = R(\lambda^n 1, \sum_{k=0}^{\ell} P_k^+(\lambda) C_{-k}) - R(\sum_{j=0}^m C_j P_j(\lambda), \lambda^n 1). \quad (2.2.10)$$

Обозначим

$$Q_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\ell} Q_{-k} \lambda^k = \sum_{k=0}^{\ell} P_k^+(\lambda) C_{-k},$$

$$Q_2(\lambda) = \sum_{j=0}^m Q_j \lambda^j = \sum_{j=0}^m C_j P_j(\lambda).$$

Тогда (2.2.10) можно переписать в виде

$$\dot{S}_n = \sum_{k=0}^{\ell} S_{n+k} Q_{-k} - \sum_{j=0}^m Q_j S_{n+j} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2.2.11)$$

Теперь рассмотрим эволюцию обобщенной спектральной функции  $R$ .

Пусть  $U(\lambda) = \sum_{p=0}^{n_1} U_p \lambda^p, V(\lambda) = \sum_{q=0}^{n_2} V_q \lambda^q$  два полинома с независящими от  $t$  операторными коэффициентами. Тогда по формуле (1.2.8)

$$\begin{aligned} R(U(\lambda), V(\lambda))^* &= \left( \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{n_2} U_p S_{p+q} V_q \right)^* = \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{n_2} U_p^* \\ &\times (R(\lambda^{p+q} 1, Q_1(\lambda)) - R(Q_2(\lambda), \lambda^{p+q} 1)) V_q = \\ &= R(U(\lambda), \sum_{q=0}^{n_2} Q_1(\lambda) \lambda^q V_q) - R(\sum_{p=0}^{n_1} U_p \lambda^p Q_2(\lambda), V(\lambda)). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили следующее уравнение эволюции для  $R$ :

$$(R(U(\lambda), V(\lambda)))^* = R(U(\lambda), Q_1(\lambda) V(\lambda) - R(U(\lambda) Q_2(\lambda), V(\lambda))). \quad (2.2.12)$$

Нами доказана

**Лемма 2.2.2.** Если разностное выражение  $L(t)$  ( $t \in [0, T]$ ) является решением уравнения Лакса (2.2.2), то эволюция соответствующей обобщенной спектральной функции  $R$  и последовательность моментов  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  задается уравнениями (2.2.11), (2.2.12).

## § 2.2. Полубесконечные и конечные неабелевы цепочки, связанные с несимметричными разностными выражениями с операторными коэффициентами

В этом параграфе мы обобщим метод обратной спектральной задачи на случай цепочек нелинейных дифференциально-разностных уравнений, связанных с разностным выражением вида (I.2.II) с коэффициентами из пространства ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве  $H$ , аналог прямой и обратной спектральной задачи для которого был рассмотрен в § I.2. В п. I мы опишем общий вид цепочки, допускающей представление Лакса и выведем уравнения эволюции соответствующих обобщенной спектральной функции и моментной последовательности. Затем будут рассмотрены примеры: в п. 2 мы построим решения задачи Коши для полубесконечных неабелевых цепочек Тоды и Вольтерра, а в п. 3 рассмотрим редукцию неабелевой цепочки Вольтерра к разностному аналогу уравнения  $mKq\Phi$ . Наконец, случай конечных цепочек будет разобран в п. 4.

### I. Уравнение Лакса и эволюция обобщенной спектральной меры.

Рассмотрим разностное выражение вида (I.2.II) с гладко зависящими от времени  $t$  коэффициентами:

$$(L(t)u)_n = A_{n-1}(t)u_{n-1} + B_n(t)u_n + u_{n+1} \quad (2.2.1)$$

( $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $A_n = A_n(t)$ ,  $B_n = B_n(t) \in \mathcal{L}(H)$ ,  $A_{-1} = 0$ ,  $A_n$  обратимы ( $n \in \mathbb{Z}_+$ );  $t \in [0, T)$ ) и предположим, что оно удовлетворяет уравнению Лакса,

$$\dot{L}(t) = [L(t), A(t)], \quad (2.2.2)$$

где

$$(Au)_n = \sum_{j=-\ell}^m C_{jn} u_{n+j} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, C_{pq} = 0 \text{ при } p+q < 0). \quad (2.2.3)$$

Выражение  $A(t)$  может быть представлено как бесконечная матрица с операторными коэффициентами с  $m$  ненулевыми диагоналями выше главной и  $\ell$  ненулевыми диагоналями ниже главной диагонали. Специальный вид разностного выражения (2.2.1) накладывает жесткие условия на коэффициенты  $A$ . Именно, справедлива

Лемма 2.2.1. Для произвольных оператор-функций  $C_k = C_k(t)$  ( $k = -\ell, \dots, 0, \dots, m$ ), зависящих, вообще говоря, от коэффициентов  $L(t)$ , существует единственное разностное выражение  $A(t)$  вида (2.2.3), для которого

$$C_{k,-k} = C_k \quad (k = -\ell, \dots, -d), \quad C_{k0} = C_k \quad (k = 0, \dots, m) \quad (2.2.4)$$

и имеет смысл уравнение Лакса (2.2.2).

Доказательство. Для того, чтобы уравнение (2.2.2) имело смысл, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$(LA - AL)_{jk} = 0 \quad (j > k+1 \text{ или } j < k). \quad (2.2.5)$$

Учитывая, что  $(A)_{jk} = C_{k-j,j}$  ( $j \in \mathbb{Z}_+, -\ell \leq k-j \leq m$ )

и  $(A)_{jk} = 0$  в остальных случаях, можно переписать условия (2.2.5) в виде

$$\begin{aligned} A_{j-1} C_{k-j+1,j-1} + B_j C_{k-j,j} + C_{k-j-1,j+1} = \\ = C_{k-j-1,j} + C_{k-j,j} B_k + C_{k-j+1,j} A_k. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Положим в (2.2.6)  $k-j = m+1$  тогда, так как  $C_{pq} = 0$  при  $p > m$ , получим  $C_{m,j+1} = C_{m,j} = \dots = C_{m,0} = C_m$ . Аналогично, при  $k-j = m$  получаем из (2.2.6)

$$C_{m-1,j+1} = C_{m-1,j} + C_{m,j} B_{j+m} - B_j C_{m,j}.$$

Вообще, если  $k-j = p+1$ , где  $0 \leq p \leq m$ , то из (2.2.6) следует

$$C_{p,j+1} = C_{p,j} + C_{p+1,j} B_{j+p+1} - B_j C_{p+1,j} + C_{p+2,j} A_{j+p+1} - A_{j-1} C_{p+2,j-1}. \quad (2.2.7)$$

Справедливо и обратное утверждение.

Лемма 2.2.3. Пусть для отображения  $R = R(t)$ :

$P(H) \times P(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ , удовлетворяющего условиям теоремы 1.2.1, выполняется при  $t \in [0, T)$  уравнение (2.2.12), где  $Q_1(\lambda) = \sum_{k=0}^l Q_{-k} \lambda^k$ ,

$Q_2(\lambda) = \sum_{j=0}^m Q_j \lambda^j$  — полиномы с операторными, вообще говоря,

зависящими от  $t$  коэффициентами. Тогда восстановленное по  $R$  разностное выражение  $L(t)$  вида (2.2.1) удовлетворяет уравнению Лакса (2.2.2), причем коэффициенты выражения  $A(t)$  равны

$$\begin{aligned} C_{-k,p} &= R(P_p(\lambda), Q_1(\lambda) P_{p-k}^+(\lambda)) \\ C_{j,q} &= R(P_q(\lambda) Q_2(\lambda), P_{q+j}^+(\lambda)) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$(1 \leq k \leq l, p \geq k; 0 \leq j \leq m, q \in \mathbb{Z}_+).$$

Здесь  $P_n(\lambda) = \lambda^n 1 + \dots$ ,  $P_n^+(\lambda)$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) — последовательности полиномов, построенные по  $R$  в результате процедуры псевдоортогонализации.

Доказательство. Докажем сначала, что коэффициенты (2.2.13) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.2.7), (2.2.8). При этом воспользуемся соотношениями (1.2.2), справедливыми для полиномов  $P_n(\lambda)$ ,  $P_n^+(\lambda)$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Пусть  $0 \leq j \leq m$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда

$$\begin{aligned} C_{j,q+1} &= R(P_{q+1}(\lambda) Q_2(\lambda), P_{q+j+1}^+(\lambda)) = \\ &= R([( \lambda 1 - B_q ) P_q(\lambda) - A_{q-1} P_{q-1}(\lambda)] Q_2(\lambda), P_{q+j+1}^+(\lambda)) = \\ &= R(P_q(\lambda) Q_2(\lambda), \lambda P_{q+j+1}^+(\lambda)) - B_q R(P_q(\lambda) Q_2(\lambda), P_{q+j+1}^+(\lambda)) - \\ &\quad - A_{q-1} R(P_{q-1}(\lambda) Q_2(\lambda), P_{q+j+1}^+(\lambda)). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$R(P_q(\lambda) Q_2(\lambda), \lambda P_{q+j+1}^+(\lambda)) =$$



$$\begin{aligned}
 &= R(P_q(\lambda)Q_2(\lambda), P_{q+j}(\lambda)) + R(P_q(\lambda)Q_2(\lambda), P_{q+j+1}^+(\lambda)) B_{q+j+1}^+ \\
 &+ R(P_q(\lambda)Q_2(\lambda), P_{q+j+2}^+(\lambda)) A_{q+j+1} = \\
 &= C_{j,q} + C_{j+1,q} B_{q+j+1} + C_{j+2,q} A_{q+j+1},
 \end{aligned}$$

получим

$$C_{j,q+1} = C_{j,q} + C_{j+1,q} B_{q+j+1} + C_{j+2,q} A_{q+j+1} - B_q C_{j+1,q} - A_{q-1} C_{j+2,q-1}.$$

Аналогично, при  $1 \leq k \leq l$ ,  $p \geq k$

$$\begin{aligned}
 C_{-k,p+1} &= R(P_{p+1}(\lambda), Q_1(\lambda) P_{p+1-k}^+(\lambda)) = R(P_{p+1}(\lambda), Q_1(\lambda) \times \\
 &\times [P_{p-k}^+(\lambda)(\lambda I - B_{p-k}) - P_{p-k-1}^+(\lambda)]) A_{p-k}^{-1} = R(\lambda P_{p+1}(\lambda), Q_1(\lambda) P_{p-k}^+(\lambda)) A_{p-k}^{-1} - \\
 &- C_{-k-1,p+1} B_{p-k} A_{p-k}^{-1} - C_{-k-2,p+1} A_{p-k}^{-1} = (A_p C_{-k,p} + B_{p+1} C_{-k-1,p+1} + \\
 &+ C_{-k-2,p+2} - C_{-k-1,p+1} B_{p-k} - C_{-k-2,p+1}) A_{p-k}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Для завершения доказательства нам необходимо показать, что оператор-функции  $A_n$ ,  $B_n$ , восстановленные по  $R(t)$  при помощи формул (I.2.14), удовлетворяют системе (2.2.9). Сначала установим несколько вспомогательных соотношений, которые следуют из уравнения (2.2.12) и соотношений ортогональности (I.2.5)

$$\begin{aligned}
 I \cdot 0 &= (R(P_{n-1}(\lambda), P_n^+(\lambda)))^* = R(\dot{P}_{n-1}(\lambda), P_n^+(\lambda)) + \\
 &+ R(P_{n-1}(\lambda), \dot{P}_n^+(\lambda)) + R(P_{n-1}(\lambda), Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda)) - \\
 &- R(P_{n-1}(\lambda) Q_2(\lambda), P_n^+(\lambda)).
 \end{aligned}$$

Так как в силу соотношений ортогональности первое слагаемое равно нулю, получим

$$R(P_{n-1}(\lambda), \dot{P}_n^+(\lambda)) + R(P_{n-1}(\lambda), Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda)) = R(P_{n-1}(\lambda) Q_2(\lambda), P_n^+(\lambda)). \quad (2.2.14)$$

2. Совершенно аналогично,

$$R(\dot{P}_n(\lambda), P_{n-1}^+(\lambda)) - R(P_n(\lambda) Q_2(\lambda), P_{n-1}^+(\lambda)) = -R(P_n(\lambda), Q_1(\lambda) P_{n-1}^+(\lambda)), \quad (2.2.15)$$

$$R(\dot{P}_{n+1}(\lambda), P_n^+(\lambda)) - R(P_{n+1}(\lambda) Q_2(\lambda), P_n^+(\lambda)) = -R(P_{n+1}(\lambda), Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda)). \quad (2.2.16)$$

3. Продифференцируем равенство  $R(P_n(\lambda), P_n^+(\lambda)) = 1$  согласно (2.2.12) и учтем, что так как  $\dot{P}_n(\lambda) = (\lambda^n 1 + \dots)^*$  является полиномом степени ниже  $n$ , то  $R(\dot{P}_n(\lambda), P_n^+(\lambda)) = 0$ . Получим

$$R(P_n(\lambda) Q_2(\lambda), P_n^+(\lambda)) = R(P_n(\lambda), \dot{P}_n^+(\lambda)) + R(P_n(\lambda), Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda)). \quad (2.2.17)$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} \dot{B}_n &= (R(\lambda P_n(\lambda), P_n^+(\lambda)))^* = R(\dot{P}_n(\lambda), \lambda P_n^+(\lambda)) + R(\lambda P_n(\lambda), \dot{P}_n^+(\lambda)) + \\ &+ R(\lambda P_n(\lambda), Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda)) - R(P_n(\lambda) Q_2(\lambda), \lambda P_n^+(\lambda)). \end{aligned}$$

Используя (1.2.2), перепишем последнее выражение в виде

$$\begin{aligned} &R(\dot{P}_n(\lambda), P_{n-1}^+(\lambda)) - R(P_n(\lambda) Q_2(\lambda), P_{n-1}^+(\lambda)) + A_{n-1} (R(P_{n-1}(\lambda), \\ &\dot{P}_n^+(\lambda)) + R(P_{n-1}(\lambda), Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda))) + B_n (R(P_n(\lambda), \dot{P}_n^+(\lambda)) + R(P_n(\lambda), \\ &Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda)) - R(P_n(\lambda) Q_2(\lambda), P_n^+(\lambda))) + B_n + R(P_{n+1}(\lambda), \\ &Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda)) - R(P_n(\lambda) Q_2(\lambda), P_{n+1}(\lambda)) A_n. \end{aligned}$$

Применим формулы (2.2.14), (2.2.15), (2.2.17):

$$\dot{B}_n = A_{n-1} R(P_{n-1}(\lambda) Q_2(\lambda), P_n^+(\lambda)) - R(P_n(\lambda) Q_2(\lambda), P_{n+1}^+(\lambda)) A_n +$$

$$+ R(P_{n+1}(\lambda), Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda)) - R(P_n(\lambda), Q_1(\lambda) P_{n-1}^+(\lambda)) + \\ + [B_n, R(P_n(\lambda) Q_2(\lambda), P_n^+(\lambda))],$$

откуда, с учетом (2.2.13), и следует выполнение уравнения системы (2.2.9) для  $B_n$ .

Аналогично,

$$\dot{A}_n = (R(\lambda P_{n+1}(\lambda), P_n^+(\lambda)))' = A_n(R(P_n(\lambda), \dot{P}_n(\lambda)) + R(P_n(\lambda), Q_1(\lambda) \times \\ \times P_n^+(\lambda)) - R(P_{n+1}(\lambda) Q_2(\lambda), P_{n+1}(\lambda)) A_n + R(P_{n+2}(\lambda), Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda))) + \\ + (R(\dot{P}_{n+1}(\lambda), P_{n+1}^+(\lambda)) - R(P_{n+1}(\lambda) Q_2(\lambda), P_{n+1}^+(\lambda))) + \\ + B_{n+1} R(P_{n+1}(\lambda), Q_1(\lambda) P_n^+(\lambda)) + (R(\dot{P}_{n+1}(\lambda), P_n^+(\lambda)) - \\ - R(P_{n+1}(\lambda) Q_2(\lambda), P_n^+(\lambda))) B_n.$$

Применяя формулы (2.2.15) - (2.2.17) и учитывая (2.2.13), убеждаемся в справедливости уравнения для  $A_n$  системы (2.2.9).

Доказательство завершено.

Из лемм 2.2.2, 2.2.3 следует, что для того, чтобы решить уравнение Лакса (2.2.2) или, что эквивалентно, систему (2.2.9), достаточно решить систему (2.2.II) и затем воспользоваться для восстановления неизвестных функций  $A_n, B_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) формулами (1.2.19), (1.2.23).

Необходимо отметить, что коэффициенты  $Q_{-k}, Q_j$  ( $k=1, \dots, l$ ;  $j=0, \dots, m$ ), вообще говоря, зависят от неизвестных функций системы (2.2.9) (При этом, если  $Q_{-k}, Q_j$  - константы, это не означает, что константами являются  $C_k$  из (2.2.4).)

Ниже мы рассмотрим примеры неабелевых цепочек вида (2.2.9), для которых систему (2.2.II) удастся разрешить.

## 2. Полубесконечные неабелевы цепочки Тоды и Вольтерра.

В п.4 § 2.1 мы построили решения специального вида неабелевой цепочки Тоды (2.1). Теперь мы получим для этой системы решение задачи Коши для произвольных начальных данных, ограниченных в совокупности.

Положим в (2.2.4)  $\ell=1, m=0, C_{-1}=A_0, C_0=0$ .

Тогда из рекуррентных соотношений (2.2.7), (2.2.8) получим

$$C_{0,j} = C_{0,j-1} = \dots = C_0 = 0 \quad (j \in \mathbb{Z}_+), C_{-1,j} = A_{j-1} C_{-1,j-1} A_{j-2}^{-1} = \\ = A_{j-1} \dots A_1 C_{-1} A_0^{-1} \dots A_{j-2}^{-1} = A_{j-1} \quad (j \geq 2).$$

В этом случае разностное выражение (2.2.3) имеет вид

$$(Au)_n = A_{n-1} u_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1}=0), \quad (2.2.18)$$

а система (2.2.9) превратится в неабелеву цепочку Тоды

$$\dot{A}_n = B_{n+1} A_n - A_n B_n, \dot{B}_n = A_n - A_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1}=0). \quad (2.2.19)$$

Мы будем искать решения, удовлетворяющие условию

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+, t \in [0, T]} (\|A_n(t)\|, \|B_n(t)\|) < \infty. \quad (2.2.20)$$

В этом случае разностные выражения  $L(t)$  и  $A(t)$  порождают ограниченные операторы в пространстве

$$\ell_1([0, \infty), H) = \{(u_n)_{n=0}^\infty \mid u_n \in B, \sum_{n=0}^\infty \|u_n\| < \infty,$$

для которых мы сохраним те же обозначения.

**Лемма 2.2.4.** Для произвольных начальных данных  $(A_n(0), B_n(0))_{n=0}^\infty$ ; ограниченных в совокупности, для некоторого  $\delta > 0$  на интервале  $[0, \delta)$  существует и единственно решение задачи Коши для системы (2.2.19).

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение Лакса, эквивалентное системе (2.2.19), соответствующее разностное выражение (2.2.18)

обозначим  $A(L)$ , чтобы подчеркнуть его зависимость от разностного выражения (2.2.1). Тогда выражение  $F(L)=[L, A(L)]$  задает отображение, действующее в пространстве ограниченных трехдиагональных операторов из  $\mathcal{L}(\ell_1([0, \infty), H))$ , порожденных разностными выражениями

$$(v u_n) = u_{n-1} u_{n-1} + v_n u_n + w_n u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, u_{-1} = 0),$$

где  $u_n, v_n, w_n \in \mathcal{L}(H)$ . Покажем, что это отображение удовлетворяет условию Липшица. Действительно,

$$\begin{aligned} \|F(v_1) - F(v_2)\| &= \|[v_1, A(v_1)] - [v_2, A(v_2)]\| = \|v_1(A(v_1) - A(v_2)) + \\ &+ (v_1 - v_2)A(v_2) + A(v_2)(v_2 - v_1) + (A(v_2) - A(v_1))v_1\| \leq 2(\|v_1\| \cdot \|A(v_1) - A(v_2)\| + \\ &+ \|A(v_2)\| \cdot \|v_2 - v_1\|). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\|u_n\| \leq \|v\| \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \quad \text{и} \quad \|A(v)\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (\|u_n\|),$$

получаем  $\|F(v_1) - F(v_2)\| \leq 2(\|v_1\| + \|v_2\|)\|v_2 - v_1\|$ ,

откуда следует липшицевость на множестве  $\{\|v - L(0)\| \leq K < \infty\}$ , а следовательно, по теореме Пикара, существование и единственность решения на интервале  $[0, \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$ . Кроме того, так как уравнение для  $A_n(t)$  системы (2.2.19) является линейным относительно  $A_n$  и  $A_n(0)$  — обратимый оператор, то операторы  $A_n(t)$  также являются обратимыми при  $t \in [0, \delta)$ . ■

**Лемма 2.2.5.** Пусть  $(A_n(t), B_n(t))_{n=0}^{\infty}$  — решение системы (2.2.19) на интервале  $[0, T]$ , удовлетворяющее условию (2.2.20). Тогда для любого момента времени  $t \in [0, T]$  значения моментов  $S_n(t)$ , соответствующих  $L(t)$ , определя-

ются по формулам

$$S_n(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S_{n+k}(0) \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S_k(0) \right)^{-1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \quad (2.2.21)$$

Доказательство. Если выполняются условия леммы, то, по доказанному в лемме 2.2.2, моментная последовательность  $(S_n(t))_{n=0}^{\infty}$ , отвечающая оператору  $L(t)$ , построенному по  $(A_n(t), B_n(t))_{n=0}^{\infty}$ , является решением системы (2.2.II). Так как  $A(t)$  задается формулой (2.2.IB), то полиномы  $Q_1(\lambda), Q_2(\lambda)$  имеют в данном случае вид  $Q_1(\lambda) = P_0^+(\lambda)C_0 + P_1^+(\lambda)C_{-1} = (\lambda I - B_0)A_0^{-1}A_0 = \lambda I - B$ ,  $Q_2(\lambda) = 0$ . Поэтому система (2.2.II) примет вид

$$\dot{S}_n = S_{n+1} - S_n S_1 \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \quad (2.2.22)$$

Здесь мы учли, что в силу формул (1.2.23),  $B_0 = S_1$ .

Пусть  $X(t)$  - решение уравнения  $\dot{X} = -X S_1$  с начальным условием  $X(0) = I$ . Тогда для любого  $n \geq 1$

$$S_n(t) = S_n(0)X(t) + \int_0^t S_{n+1}(t_1)X^{-1}(t_1)X(t)dt_1.$$

Множественно применяя это равенство, получим для  $S_1(t)$

$$S_1(t) = S_1(0)X(t) + \sum_{k=2}^n S_k(0) \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} X(t) + \\ + \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} S_{n+1}(t_n)X^{-1}(t_n)dt_1 \dots dt_n X(t).$$

Из условия (2.2.20) следует, что  $\|S_{n+1}(t_n)\| = \|(\mathcal{L}^{n+1}(t_n))_{00}\| \leq \|\mathcal{L}(t_n)\|^{n+1} \leq C^{n+1}$ , где  $C$  - некоторая константа. Поэтому интеграл в последнем равенстве оценивается по норме сверху выражением  $K \frac{C^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1}$ , а следовательно, равномерно стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  на  $[0, T]$ . Таким образом,

$$S_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_{k+1}(0) \frac{t^k}{k!} X(t). \text{ Воспользуемся теперь тем, что } S_1(t) = -X^{-1}(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t) = (\dot{X}^{-1}(t))^* =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} S_{k+1}(0) \frac{t^k}{k!}, \text{ то есть } X(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} S_k(0) \frac{t^k}{k!} \right)^{-1} \quad \text{и}$$

$$S_1(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} S_{k+1}(0) \frac{t^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} S_k(0) \frac{t^k}{k!} \right)^{-1}. \quad (2.2.23)$$

С учетом (2.2.23), формулы (2.2.21) следуют непосредственно из уравнений системы (2.2.22).

Из лемм 2.2.3 – 2.2.5 немедленно следует справедливость теоремы о разрешимости задачи Коши для неабелевой цепочки Тоды (2.2.19).

**Теорема 2.2.1.** Для произвольных начальных данных  $(A_n(0), B_n(0))_{n=0}^{\infty}$ , ограниченных в совокупности, решение задачи Коши для системы (2.2.19) существует и единственно на некотором интервале  $[0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ). Процедура построения решения такова: по начальным данным строится разностное выражение  $L(0)$  и последовательность моментов  $S_n(0) = (L^n(0))_{00}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ); значения моментов для произвольного  $t \in [0, \delta)$  задаются формулами (2.2.21); наконец, формулы (2.2.19), (1.2.23) позволяют восстановить неизвестные функции  $A_n(t), B_n(t)$ . Если, кроме того, на некотором интервале  $[t_1, t_2)$  ( $t_1 > \delta$ ) последовательность (2.2.21) невырождена, то функции  $A_n(t), B_n(t)$ , восстановленные по ней при помощи (1.2.19), (1.2.23), удовлетворяют системе (2.2.19).

Следующий пример неабелевой цепочки вида (2.2.9) – неабелева цепочка Вольтерра – связан с разностным выражением (2.2.1), в котором все коэффициенты  $B_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) равны нулю:

$$(L(t)u)_n = A_{n-1}(t)u_{n-1} + u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1} = 0). \quad (2.2.24)$$

Как показывает лемма 2.2.1 вид системы (2.2.9) полностью задается выбором операторов (2.2.4). Положим

$$\ell=0, m=2, C_2=C_{2,0}=-1, C_1=C_{1,0}=0, C_0=C_{0,0}=-A_0 \quad (2.2.25)$$

Тогда из рекуррентных соотношений (2.2.7) следует, что

$$C_{2,j}=-1 \ (j \in \mathbb{Z}_+); C_{1,j+1}=C_{1,j}+B_{j+p+1}-B_j= \quad (2.2.26)$$

$$=C_{1,j}=\dots=C_1=0 \ (j \in \mathbb{Z}_+);$$

$$C_{0,j+1}=C_{0,j}-A_{j+1}+A_{j-1}=C_{0,j-1}-A_j+A_{j-2}-A_{j+1}+A_{j-1}=\dots=C_0-A_1-\sum_{k=1}^j(A_{k+1}-A_{k-1})=-(A_j+A_{j+1}) \ (j \in \mathbb{Z}_+).$$

Мы получили вид разностного выражения (2.2.3), соответствующего (2.2.25)

$$(Au)_n=-((A_{n-1}+A_n)u_n+u_{n+2}) \ (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1}=0). \quad (2.2.27)$$

Подставим (2.2.26) в (2.2.9). Тогда второе уравнение (2.2.9)

превращается в тривиальное тождество  $0=0$  и мы приходим к системе

$$\dot{A}_n=A_{n+1}A_n-A_nA_{n-1} \ (n \in \mathbb{Z}_+, A_{-1}=0), \quad (2.2.28)$$

которую называют неабелевой цепочкой Вольтерра ([9]).

Можно доказать теорему, совершенно аналогичную теореме 2.2.1.

**Теорема 2.2.2.** Для произвольных начальных данных  $(A_n(0))_{n=0}^{\infty}$ , ограниченных в совокупности, решение задачи Коши для системы (2.2.28) существует и единственно на некотором интервале  $[0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ). Процедура построения решения: по начальным данным строится разностное выражение  $L(0)$  вида (2.2.24) и последовательность моментов  $S_n(0)=(L^n(0))_{00}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ); значения моментов для произвольного  $t \in [0, \delta)$  задаются формулами



$$S_{2n}(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S_{2(n+k)}(0) \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S_{2k}(0) \right)^{-1},$$

$$S_{2n+1}(t) \equiv 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \quad (2.2.29)$$

Формулы (I.2.19), (I.2.23) позволяют восстановить неизвестные функции  $A_n(t)$ . Если, кроме того, на некотором интервале  $[t_1, t_2)$  ( $t_1 > \delta$ ) последовательность (2.2.29) невырождена, то функции  $A_n(t), B_n(t)$ , восстановленные по ней при помощи (I.2.19), (I.2.23), удовлетворяют системе (2.2.28).

Доказательство. Доказательство существования и единственности решения на некотором интервале  $[0, \delta)$  производится точно так же, как в лемме 2.2.4. Рассмотрим теперь систему (2.2.II), соответствующую неабелевой цепочке Вольтерра. Благодаря (2.2.25)

$$Q_1(\lambda) = C_0 = -A_0, \quad Q_2(\lambda) = \sum_{j=0}^2 Q_j \lambda^j = -A_0 - P_2(\lambda) =$$

$$= -A_0 - (\lambda P_1(\lambda) - A_0) = -\lambda^2,$$

поэтому система (2.2.II) примет вид

$$\dot{S}_n = S_{n+2} - S_n S_2 \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \quad (2.2.30)$$

(Мы учли, что в силу формул (I.2.23),  $A_0 = S_2 - S_1^2 = S_2$ .)

По лемме I.2.4 моментная последовательность, соответствующая разностному выражению вида (2.2.24), удовлетворяет условию  $S_{2n+1}(t) = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ), что согласуется с системой (2.2.30). Если теперь обозначить  $\tilde{S}_n(t) = S_{2n}(t)$ , то оператор-функции  $\tilde{S}_n(t)$  удовлетворяют системе (2.2.22), а значит, для них справедливы формулы (2.2.2I), которые с учетом вида  $\tilde{S}_n(t)$  примут вид (2.2.29). Для завершения доказательства теперь достаточно воспользоваться леммой 2.2.3. ■

системах (2.2.19), (2.2.28) в качестве неизвестных матрицы специального вида, можно получать различные цепочки обыкновенных нелинейных дифференциально-разностных уравнений (примеры таких редукций в случае неабелевых цепочек Тоды и Вольтерра на всей оси  $\dots, -1, 0, 1, \dots$  см., например, в [ ]).

Мы рассмотрим для системы (2.2.28) простейший случай, когда неизвестные  $A_n$  являются диагональными матрицами  $2 \times 2$ :

$$A_n = \text{diag}(f_n(a_n, a_{n+1}), g_n(a_n, a_{n+1})) \quad (2.2.31)$$

( $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $a_n = a_n(t)$  — скалярные функции, а  $f_n(x, y), g_n(x, y)$  — заданные гладкие функции двух переменных,  $f_{-1} = g_{-1} \equiv 0$ ).

Тогда из (2.2.28) следует, что для каждого  $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} \dot{a}_n f_{nx}(a_n, a_{n+1}) + \dot{a}_{n+1} f_{ny}(a_n, a_{n+1}) &= f_n(a_n, a_{n+1}) \times \\ &\times (f_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+2}) - f_{n-1}(a_{n-1}, a_n)) \\ \dot{a}_n g_{nx}(a_n, a_{n+1}) + \dot{a}_{n+1} g_{ny}(a_n, a_{n+1}) &= g_n(a_n, a_{n+1}) \times \\ &\times (g_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+2}) - g_{n-1}(a_{n-1}, a_n)). \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

(Здесь  $u_x(x, y) = \frac{d}{dx} u(x, y)$ ,  $u_y(x, y) = \frac{d}{dy} u(x, y)$ ).

Мы будем предполагать, что якобианы

$$\Delta_n(x, y) = \begin{vmatrix} f_{nx} & f_{ny} \\ g_{nx} & g_{ny} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.2.32)$$

Тогда (2.2.32) можно разрешить относительно  $\dot{a}_n, \dot{a}_{n+1}$ :

$$\dot{a}_n = \Delta_{n,1} / \Delta_n(a_n, a_{n+1}), \dot{a}_{n+1} = \Delta_{n,2} / \Delta_n(a_n, a_{n+1}), \quad (2.2.33)$$

где  $\Delta_{n,1} = (g_{ny} \cdot f_n)(a_n, a_{n+1})(f_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+2}) - f_{n-1}(a_{n-1}, a_n)) -$

$$\begin{aligned}
&= (f_n \cdot g_n)(a_n, a_{n+1})(g_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+2}) - g_{n-1}(a_{n-1}, a_n)), \\
\Delta_{n,2} &= (f_n \cdot g_n)(a_n, a_{n+1})(g_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+2}) - g_{n-1}(a_{n-1}, a_n)) - \\
&\quad - (g_n \cdot f_n)(a_n, a_{n+1})(f_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+2}) - f_{n-1}(a_{n-1}, a_n)).
\end{aligned}$$

Функции  $f_n, g_n (n \in \mathbb{Z}_+)$  не могут быть произвольными. Действительно, полагая в (2.2.33) последовательно  $n = k$  и  $n = k+1$ , убеждаемся, что должно выполняться условие совместности

$$\Delta_{k,2} \Delta_{k+1} = \Delta_{k+1,1} \Delta_k \quad (k \in \mathbb{Z}_+). \quad (2.2.34)$$

Приведем пример выбора  $f_n, g_n (n \in \mathbb{Z}_+)$ , для которых выполняется условие (2.2.34). Положим для  $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$  ( $v_1 \neq v_2$ )

$$\begin{aligned}
f_{2n}(x, y) &= (x - v_1)(y - v_1), \quad f_{2n+1}(x, y) = (x - v_2)(y - v_2), \\
g_n(x, y) &= (x - v_2)(y - v_1), \quad (n \in \mathbb{Z}_+).
\end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Delta_{2n}(x, y) &= (y - v_1)(x - v_2) - (x - v_1)(y - v_1) = (y - v_1)(v_1 - v_2), \\
\Delta_{2n+1}(x, y) &= (y - v_2)(x - v_2) - (x - v_2)(y - v_1) = (x - v_2)(v_1 - v_2), \\
\Delta_{2n,1} &= (a_{2n} - v_2)(a_{2n} - v_1)(a_{2n+1} - v_1)((a_{2n+1} - v_2)(a_{2n+2} - v_2) - \\
&\quad - (a_{2n-1} - v_2)(a_{2n} - v_2)) - (a_{2n} - v_1)(a_{2n} - v_2)(a_{2n+1} - v_1)((a_{2n+1} - v_2) \times \\
&\quad \times (a_{2n+2} - v_1) - (a_{2n-1} - v_2)(a_{2n} - v_1)) = (a_{2n} - v_2)(a_{2n} - v_1)(a_{2n+1} - v_1)(v_1 - v_2)(a_{2n+1} - a_{2n-1})
\end{aligned}$$

(для выполнения условия  $f_{-1} = g_{-1} \equiv 0$  достаточно предположить, что  $a_{-1} \equiv v_2$ ).

$$\Delta_{2n+1,1} = (a_{2n+1} - v_2)^2 (a_{2n+1} - v_1) (v_1 - v_2) (a_{2n+2} - a_{2n}),$$

$$\Delta_{2n,2} = (a_{2n+1} - v_1)^2 (a_{2n+1} - v_2) (v_1 - v_2) (a_{2n+2} - a_{2n}),$$

$$\Delta_{2n+1,2} = (a_{2n+2} - v_2) (a_{2n+2} - v_1) (a_{2n+1} - v_2) (v_1 - v_2) (a_{2n+3} - a_{2n+1}).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Delta_{2n,2} \Delta_{2n+1} (a_{2n+1}, a_{2n+2}) &= (v_1 - v_2)^2 (a_{2n+1} - v_1)^2 \times \\ &\times (a_{2n+1} - v_2)^2 (a_{2n+2} - a_{2n}) = \Delta_{2n+1,1} \Delta_{2n} (a_{2n}, a_{2n+1}) \end{aligned}$$

и аналогично,

$$\Delta_{2n+1,2} \Delta_{2n+2} (a_{2n+2}, a_{2n+3}) = \Delta_{2n+2,1} \Delta_{2n+1} (a_{2n+1}, a_{2n+2}),$$

то есть выполняются условия совместности (2.2.34). Система (2.2.33) принимает вид

$$\dot{a}_n = (a_n - v_1)(a_n - v_2)(a_{n+1} - a_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+, a_{-1} \equiv v_2). \quad (2.2.36)$$

При  $v_1 = -v_2 = 1$  получаем систему

$$\dot{a}_n = (a_n^2 - 1)(a_{n+1} - a_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+, a_{-1} \equiv -1), \quad (2.2.37)$$

являющуюся разностным аналогом уравнения  $mkg\Phi$  (см.

[ , , ] ).

Пусть  $(a_n(t))_{n=0}^{\infty}$  — решение системы (2.2.36) и рассмотрим для некоторых постоянных  $c, d$  функции  $\tilde{a}_n(t) = c + d a_n(d^2 t)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n \dot{} &= d^3 (a_n - v_1)(a_n - v_2)(a_{n+1} - a_{n-1}) = d^2 \left( \frac{\tilde{a}_n - (c + d v_1)}{d} \right) \times \\ &\times \left( \frac{\tilde{a}_n - (c + d v_2)}{d} \right) (\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_{n-1}) = (\tilde{a}_n - v_1)(\tilde{a}_n - v_2)(\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_{n-1}), \end{aligned}$$

где  $\tilde{V}_i = C + d V_i$  ( $i=1,2$ ). Выбирая  $C = (1 - \frac{2V_1}{V_1 - V_2})$ ,  $d = \frac{2}{V_1 - V_2}$ , [page 110]  
 получаем  $V_1 = -V_2 = 1$ , то есть  $(\tilde{a}_n(t))_{n=0}^{\infty}$  является решением системы (2.2.37). Поэтому ниже мы будем рассматривать только систему (2.2.37), учитывая при этом, что все результаты, справедливые для нее справедливы и для систем вида (2.2.36).

Поскольку система (2.2.37) может быть записана в виде (2.2.28), для интегрирования (2.2.37) применима теорема 2.2.2. Рассмотрим разностное выражение (2.2.24) с коэффициентами, задаваемыми (2.2.31), (2.2.35). Тогда соответствующая последовательность моментов  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  состоит из диагональных матриц  $2 \times 2$ :

$$S_n = \text{diag}(S_{n,1}, S_{n,2}), \quad (2.2.38)$$

причем  $S_{2n+1} = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Обозначим

$$D_{n,i}(t) = \det \left( \sum_{p=0}^{\infty} S_{j+k+2p,i}(0) \frac{t^p}{p!} \right)_{j,k=0}^n \quad (i=1,2). \quad (2.2.39)$$

Теорема 2.2.3. Для произвольных начальных данных  $(a_n(0))_{n=0}^{\infty}$ , ограниченных в совокупности, решение задачи Коши для системы (2.2.37) существует и единственно на интервале  $[0, \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$  и задается формулами

$$\frac{a_{2n}(t)-1}{a_{2n}(t)+1} = \frac{D_{2n-1,1}(t) D_{2n+1,1}(t) D_{2n,2}^2(t)}{D_{2n-1,2}(t) D_{2n+1,2}(t) D_{2n,1}^2(t)},$$

$$(a_{2n+1}(t)-1) = \frac{D_{2n-1,1}(t) D_{2n+1,1}(t)}{(a_{2n}(t)-1) D_{2n,1}^2(t)}. \quad (2.2.40)$$

Доказательство. Как мы показали выше, если  $(a_n(t))_{n=0}^{\infty}$  — решение системы (2.2.37), то последовательность  $(A_n(t))_{n=0}^{\infty}$ , где

$$A_{2k} = (a_{2k+1}-1) \text{diag}(a_{2k}-1, a_{2k}+1),$$

$$A_{2k+1} = (a_{2k+1} + 1) \text{diag}(a_{2k+2} + 1, a_{2k+2} - 1) \quad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

является решением неабелевой цепочки Вольтерры (2.2.28), а значит, для последовательности моментов  $(S_n(t))_{n=0}^\infty$ , соответствующей разностному выражению (2.2.24) справедливы формулы (2.2.29), которые с учетом (2.2.38) могут быть записаны в виде

$$S_{n,i}(t) = \left( \sum_{p=0}^{\infty} S_{n+2p,i}(0) \frac{t^p}{p!} \right) (h_i(t))^{-1} \quad (i=1,2), \quad (2.2.41)$$

где  $h_i(t) = \sum_{p=0}^{\infty} S_{2p,i}(0) \frac{t^p}{p!}$ . Далее, так как все  $A_n$  и  $S_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) диагональны, а следовательно, коммутируют друг с другом, то для коэффициентов разностного выражения (2.2.24) применимы формулы, хорошо известные в скалярном случае ( $[$  ,  $]$ ) аналогичные формулам (I.I.I5). Именно,

$$A_n = D_{n-1} D_{n+1} / D_n^2 \quad (n \in \mathbb{Z}_+, D_{-1} = 1), \quad (2.2.42)$$

где  $D_n(t) = \det(S_{j+k}(t))_{j,k=0}^n = \text{diag}(D_{n,1}(t) h_1^{-(n+1)}(t), D_{n,2}(t) h_2^{-(n+1)}(t))$ , а функции  $D_{n,i}(t), h_i(t)$  ( $i=1,2$ ) задаются 2.2.39), (2.2.41). Теперь формулы (2.2.40) непосредственно следуют из (2.2.42) и вида  $A_{2n}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). ■

Замечание. Если матрицы  $A_n(0)$ , соответствующие начальным данным  $(a_n(0))_{n=0}^\infty$  — положительны, то преобразование подобия  $L(0) \rightarrow \sqrt{L(0)} \sqrt{L(0)}^{-1} = \tilde{L}$ , где  $(\sqrt{L})_n = \sqrt{L} u_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+, \sqrt{L}_0 = 1, \sqrt{L}_{n+1} = A_n^{\frac{1}{2}}(0) \dots A_0^{\frac{1}{2}}(0)$ ) переводит  $L(0)$  в разностное выражение

$$(\tilde{L} u)_n = A_{n-1}^{\frac{1}{2}}(0) u_{n-1} + A_n^{\frac{1}{2}}(0) u_{n+1} \quad (2.2.43)$$

$$(n \in \mathbb{Z}_+, u = (u_n)_{n=0}^\infty, u_n \in \mathbb{C}^2, A_{-1} = 0),$$

причем  $(\tilde{L}^n)_{00} = (L^n(0))_{00} = S_n$ , то есть моментные последовательности  $\tilde{L}$  и  $L(0)$  совпадают. Но (2.2.43) имеет вид

(I.I.I), поэтому  $S_n(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\varrho(\lambda)$ ,

где  $d\varrho(\lambda) = \text{diag}(d\varrho_1(\lambda), d\varrho_2(\lambda))$  - спектральная мера выражения  $\tilde{L}$ . Тогда

$$\begin{aligned} D_{n,i}(t) &= \det \left( \sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{j-k+2p} \cdot \frac{t^p}{p!} d\varrho_i(\lambda) \right)_{j,k=0}^n = \\ &= \det \left( \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{j+k} e^{\lambda^2 t} d\varrho_i(\lambda) \right)_{j,k=0}^n \quad (i=1,2). \end{aligned}$$

Так как последовательность моментов меры  $e^{\lambda^2 t} d\varrho_i(\lambda)$  при любом  $t$  положительно определена, отсюда следует, что  $D_{n,i}(t) > 0$  при любом  $t \in [0, \infty)$  ( $i=1,2$ ) и правые части (2.2.40) имеют смысл при любом  $t$ .

4. Конечные цепочки. Результаты пп. I-3 легко переносятся с полубесконечного на конечный случай, то есть на случай конечных систем нелинейных дифференциально-разностных уравнений, связанных с разностным выражением вида (I.2.3I)

$$\begin{aligned} (L(t)u)_n &= A_{n-1}(t)u_{n-1} + B_n(t)u_n + u_{n+1} \\ (n=0, \dots, N; u=(u_n)_{n=0}^N, u_{-1}=u_{N+1}=0). \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

Рассмотрим конечную неабелеву цепочку Тогда

$$\begin{aligned} \dot{A}_n &= B_{n+1} A_n - A_n B_n \quad (n=0, \dots, N-1), \\ \dot{B}_n &= A_n - A_{n-1} \quad (n=0, \dots, N) \quad (A_{-1} = A_N \equiv 0). \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

Она, как и в полубесконечном случае записывается в форме Лакса (2.2.1), где  $L(t)$  - разностное выражение (2.2.44), а  $A(t)$  - выражение вида (2.2.18), но действующее на конечные последовательности  $(u_n)_{n=0}^N$ . Моментная последовательность, отве-

чающая (2.2.44), удовлетворяет условиям теоремы I.2.4. Вывод уравнения эволюции моментов ничем не отличается от вывода уравнений (2.2.II), то есть система (2.2.22) сохраняется и в конечном случае. Продифференцируем равенство (I.2.36) в силу (2.2.22):

$$\dot{S}_{N+k+1} = S_{N+k+2} - S_{N+k+1} S_1 = \sum_{j=0}^N F_j (S_{k+1+j} - S_{k+j} S_1) =$$

$$= \left( \sum_{j=0}^N F_j S_{k+j} \right) \cdot = \sum_{j=0}^N \dot{F}_j S_{k+j} + \sum_{j=0}^N F_j (S_{k+1+j} - S_{k+j} S_1)$$

( $k \in \mathbb{Z}_+$ ), то есть  $\sum_{j=0}^N \dot{F}_j S_{k+j} = 0$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ). Но в силу условия 3 теоремы I.2.4 оператор  $(S_{j+k})_{j,k=0}^n$  обратим в  $H^{N+1}$ , откуда следует, что

$$\dot{F}_j = 0 \quad (j=0, \dots, N). \quad (2.2.46)$$

Поэтому при нахождении значений моментов в произвольный момент времени  $t$  мы можем воспользоваться формулами (2.2.2I) при  $n \leq N$  и формулами (I.2.36):

$$S_n(t) = \sum_{j=0}^N F_j S_{n-N-1+j}(t) \quad \text{при} \quad n > N.$$

Для восстановления неизвестных функций  $A_n(t)$ ,  $B_n(t)$  необходимо как и в полубесконечном случае применить формулы (I.2.I9), (I.2.23).

Совершенно такие же рассуждения справедливы и для конечной неабелевой цепочки Вольтерра

$$\dot{A}_n = A_{n+1} A_n - A_n A_{n-1} \quad (n=0, \dots, N; A_{-1} = A_{N+1} = 0). \quad (2.2.47)$$

Выбирая  $A_n$  в виде (2.2.3I), (2.2.35), мы получим при  $N = 2k$  цепочку вида (2.2.36):



$$\dot{a}_n = (a_n - \sqrt{1})(a_n - \sqrt{2})(a_{n+1} - a_{n-1}) \quad (n=0, \dots, 2K; a_{-1} = a_{2K+1} = \sqrt{2}), \quad (2.2.48)$$

а при  $N = 2K - 1$  - цепочку, отличающуюся от (2.2.4) лишь краевым условием:  $a_{-1} = \sqrt{2}, a_{2K+1} = \sqrt{1}$ . В силу сказанного выше о системах (2.2.4), (2.2.5) процедура интегрирования цепочки (2.2.4) вполне аналогична описанной в теореме 2.2.3.

### § 2.3. Представление решений бесконечной цепочки Тоды в виде ряда по степеням времени

В примере 2.1.2 было показано, что бесконечная в обе стороны цепочка Тоды

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2} a_n (b_{n+1} - b_n), \quad \dot{b}_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 \quad (2.3.1)$$

( $n \in \mathbb{Z}, a_n > 0, b_n = \bar{b}_n$ ) может быть представлена в виде (2.1.6), (2.1.8), (2.1.9), что позволило найти уравнение эволюции спектральной меры  $d\varrho(\lambda, t)$ , отвечающей операторной якобиевой матрице с коэффициентами (2.1.8) или, что эквивалентно, разностному выражению на всей оси, действующему на последовательности  $u = (u_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell_2(-\infty, \infty)$ ,

$$(\mathcal{L}(t)u)_n = a_{n-1}(t)u_{n-1} + b_n(t)u_n + a_n(t)u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.3.2)$$

(см. п.4 § I.I). (то уравнение эволюции (2.1.23) мы запишем теперь в виде

$$2d\dot{\varrho}(\lambda; t) = (\lambda J - B(t))d\varrho(\lambda; t) + d\varrho(\lambda; t)(\lambda J - B^*(t)), \quad (2.3.3)$$

где  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B(t) = \begin{pmatrix} b_{-1} & 2a_{-1} \\ -2a_{-1} & -b_0 \end{pmatrix}$ .

Как уже отмечалось в § 2.1, для решений уравнения (2.3.3) не удастся получить формул, аналогичных формуле (2.1.22), справедливой в бесконечном случае. В этом параграфе мы выведем рекуррентные формулы для решений (2.3.3) и, кроме того, получим представление решений системы (2.3.1) в виде ряда по степеням времени  $t$  при помощи своего рода "аппроксимации" их решениями конечных цепочек Тоды. При этом, наряду с представлением Лакса для системы (2.3.1), полученным в § 2.1, мы воспользуемся эквивалентным представлением Лакса

$$\dot{\mathcal{L}}(t) = [\mathcal{L}(t), \mathcal{A}(t)], \quad (2.3.4)$$

где

$$(\mathcal{A}(t)u)_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}(t)u_{n-1} - a_n(t)u_{n+1}) \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (2.3.5)$$

1. Прежде всего мы рассмотрим вопрос о возможности представления решений системы (2.3.1) в форме ряда по степеням  $t$ . Пусть  $(a_n(t), b_n(t))_{n=-\infty}^{\infty}$  — решение (2.3.1), удовлетворяющее условию

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}, t \in [0, T]} (|a_n(t)|, |b_n(t)|) \leq C < \infty \quad (2.3.6)$$

Тогда разностные выражения  $\mathcal{L}(t)$  и  $\mathcal{A}(t)$  порождают ограниченные операторы в пространстве  $\ell_2(-\infty, \infty)$ , для которых мы сохраним те же обозначения. Так как оператор  $\mathcal{A}(t)$  кососимметричен, то оператор  $\mathcal{U}(t)$ , который задается, как решение уравнения  $\dot{\mathcal{U}}(t) = -\mathcal{A}(t)\mathcal{U}(t)$  с начальным условием  $\mathcal{U}(0) = 1$ , унитарен при любом  $t$ . Дифференцируя оператор-функцию  $\mathcal{U}(t)\mathcal{L}(0)\mathcal{U}(t)$ :

$$(U(t) \mathcal{L}(0) U^{-1}(t))' = -\mathcal{A}(t) U(t) \mathcal{L}(0) U^{-1}(t) + U(t) \mathcal{L}(0) U^{-1}(t) \mathcal{A}(t),$$

легко убедиться, что  $\mathcal{L}(t) = U(t) \mathcal{L}(0) U^{-1}(t)$ . Отсюда, в частности, следует, что

$$\|\mathcal{L}(t)\| = \|\mathcal{L}(0)\|. \quad (2.3.7)$$

Поскольку для любого  $n \in \mathbb{Z}$   $\max(|a_n(t)|, |b_n(t)|) \leq \|\mathcal{L}(t)\|$ , мы в дальнейшем будем полагать в (2.3.6)  $C = \|\mathcal{L}(0)\|$ .

Лемма 2.3.1. Пусть начальные данные  $(a_n(0), b_n(0))_{n=-\infty}^{\infty}$  ограничены в совокупности. Тогда для некоторого  $\delta = \delta(C)$  решения системы (2.3.1) могут быть представлены в виде рядов по степеням времени  $t$ , равномерно сходящихся на интервале  $[0, \delta)$ .

Доказательство. Зафиксируем  $n \in \mathbb{Z}$  и рассмотрим выражения для производных  $\frac{d^k}{dt^k} a_n(t)$ ,  $\frac{d^k}{dt^k} b_n(t)$ , полученные в силу уравнений системы (2.3.1). При  $k=1$  эти выражения даются непосредственно уравнениями системы (2.3.1), для подсчета вторых производных используются уравнения для  $b_{n+1}$  и  $a_{n-1}$ :

$$\ddot{b}_n = a_n^2 (b_{n+1} - b_n) - a_{n-1}^2 (b_n - b_{n-1}),$$

$$\ddot{a}_n = \frac{1}{4} a_n (b_{n+1} - b_n)^2 + \frac{1}{2} a_n (a_{n+1}^2 - 2a_n^2 + a_{n-1}^2),$$

то есть при  $k=1, 2$  рассматриваемые выражения являются однородными полиномами степени  $k+1$  от переменных  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1},$

$b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$ . Рассмотрим теперь произвольный одночлен

$$a_{i_1} \dots a_{i_p} b_{j_1} \dots b_{j_q} \quad (i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p, j_1 \leq \dots \leq j_q$$

и продифференцируем его в силу системы (2.3.1). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^p a_{i_1} \dots a_{i_{m-1}} a_{i_{m+1}} (b_{i_m+1} - b_{i_m}) \dots a_{i_p} b_{j_1} \dots b_{j_q} + \\ & + \sum_{\ell=1}^q a_{i_1} \dots a_{i_m} b_{j_1} \dots b_{j_{\ell-1}} (a_{j_\ell}^2 - a_{j_\ell-1}^2) \dots b_{j_q}. \end{aligned}$$

Это выражение является однородным полиномом степени  $(p+q+1)$ , состоящим из  $2(p+q)$  одночленов (необязательно различных), причем минимальный и максимальный номера  $i$ , при которых  $a_i$  входит в полученное выражение, равны соответственно

$$n_a = \min(i_1, j_1 - 1) \quad \text{и} \quad m_a = \max(i_p, j_q).$$

Аналогично,

$$n_b = \min(i_1, j_1) \quad \text{и} \quad m_b = \max(i_p + 1, j_q).$$

Многократно применяя изложенные выше результаты к одночленам  $a_n$  и  $b_n$ , мы получим, что выражения для  $\frac{d^k}{dt^k} a_n(t)$  и  $\frac{d^k}{dt^k} b_n(t)$  представимы в виде суммы  $2^k k!$  одночленов степени  $(k+1)$  с коэффициентами, не превосходящими по модулю 1. Отсюда, в силу ограниченности в совокупности начальных данных  $(a_n(0), b_n(0))_{n=-\infty}^{\infty}$ , следует, что

$$\max\left(\left|\frac{d^k a_n}{dt^k}(0)\right|, \left|\frac{d^k b_n}{dt^k}(0)\right|\right) \leq 2^k k! C^{k+1} (n \in \mathbb{Z}), \quad (2.3.8)$$

а значит, ряды Тейлора-Маклорена функций  $a_n(t), b_n(t)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) сходятся равномерно на интервале  $[0, \delta]$  при  $\delta < (2C)^{-1} = (2 \cdot \|L(0)\|)^{-1}$ . Кроме того, отметим, что из вышеизложенного следует, что выражения для  $\frac{d^k}{dt^k} a_n(t)$  и  $\frac{d^k}{dt^k} b_n(t)$  не содержат  $a_i(t), b_i(t)$  ( $i < n-k$  или  $i > n+k$ ) и при подсчете этих выражений использовались только уравнения системы (2.3.1) для  $a_{n-k+1}, b_{n-k+1}, \dots, a_{n+k-1}, b_{n+k-1}$ . ■

2. Прежде чем перейти к нахождению коэффициентов рядов, представляющих решения системы (2.3.1), мы напомним, следуя [7] процедуру интегрирования конечной цепочки Тоды (см. также [29, 47]). Конечной цепочке Тоды

$$\dot{c}_n = \frac{1}{2} c_n (d_{n+1} - d_n) \quad (n=0, \dots, N-1), \quad \dot{d}_n = c_n^2 - c_{n-1}^2 \quad (n=0, \dots, N), \quad (2.3.9)$$

$(C_{-1} = C_N = 0)$  соответствует пара Лакса  $L_N, A_N$ , где

$$L_N = \begin{pmatrix} d_0 & c_0 & & 0 \\ c_0 & d_1 & c_1 & \\ & c_1 & d_2 & \ddots \\ & & \ddots & c_{N-1} & d_N \end{pmatrix}, A_N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -c_0 & & 0 \\ c_0 & 0 & c_1 & \\ c_1 & 0 & 0 & c_{N-1} \\ 0 & & c_{N-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.10)$$

Пусть  $d\rho(\lambda)$  – спектральная мера, отвечающая конечной якобиевой матрице  $L_N(0)$ , которая была описана в п.3 § I.I. Эта мера имеет скачки  $\rho_j$  в точках  $\lambda_j$  спектра матрицы  $L_N(0)$  ( $j=0, 1, \dots, N$ ). Моменты меры  $d\rho(\lambda)$  определяются по формуле (I.I.I7)

$$S_n = (L_N^n)_{00} = \sum_{j=0}^N \rho_j \lambda_j^n \quad (S_0 = \sum_{j=0}^N \rho_j = 1).$$

Обозначим

$$D_n(t) = \det \left( \sum_{p=0}^{\infty} S_{j+k+p} \frac{t^p}{p!} \right)_{j,k=0}^n. \quad (2.3.II)$$

Тогда для решений цепочки (2.3.9) с начальными данными, задаваемыми якобиевой матрицей  $L_N(0)$ , справедливы формулы

$$C_n^2(t) = \frac{D_{n-1}(t) D_{n+1}(t)}{D_n^2(t)}; \quad d_n(t) = \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{D_n(t)}{D_{n-1}(t)} \right) \quad (2.3.I2)$$

$$(n=0, \dots, N; D_{-1}=1, D_{N+1}=0).$$

Приведем еще одну формулу для функций  $D_n(t)$ .

Лемма 2.3.2.

$$D_n(t) = \sum_{\substack{0 \leq p_0 \leq \dots \leq p_n \leq N \\ (n \in \mathbb{Z}_+)}} (\exp(\lambda_{p_0} + \dots + \lambda_{p_n}) t) \rho_{p_0} \dots \rho_{p_n} W^2(\lambda_{p_0}, \dots, \lambda_{p_n}) \quad (2.3.13)$$

где  $W(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \det(\lambda_{pq})_{p,q=0}^n$  - определитель Вандермонда.

Доказательство. Перепишем элементы определителя (2.3.II)

с использованием формулы (I.I.I7)

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} S_{j+k+p} \frac{t^p}{p!} &= \sum_{p=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^N \rho_i \lambda_i^{j+k+p} \right) \frac{t^p}{p!} = \\ &= \sum_{i=0}^N \rho_i \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_i^{j+k} \frac{(\lambda_i t)^p}{p!} = \sum_{i=0}^N \rho_i \lambda_i^{j+k} e^{\lambda_i t}. \end{aligned}$$

Тогда определитель  $D_n(t)$  равен

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sum_{i_0, \dots, i_n=0}^N \det(\rho_{i_k} \lambda_{i_k}^{j+k} e^{\lambda_{i_k} t})_{j,k=0}^n = \\ &= \sum_{i_0, \dots, i_n=0}^N \rho_{i_0} \dots \rho_{i_n} e^{(\lambda_{i_0} + \dots + \lambda_{i_n}) t} \times \det(\lambda_{i_k}^{j+k})_{j,k=0}^n = \\ &= \sum_{0 \leq p_0 \leq \dots \leq p_n \leq N} \rho_{p_0} \dots \rho_{p_n} e^{(\lambda_{p_0} + \dots + \lambda_{p_n}) t} \cdot \sum_{\sigma \in S^{n+1}} \text{sign}(\sigma) \det(\lambda_{p_k}^{j+\sigma(k)})_{j,k=0}^n. \end{aligned}$$

Здесь  $S^{n+1} = \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}$  - группа подстановок из  $(n+1)$ -го элемента,  $\text{sign}(\sigma)$  - четность подстановки. Теперь справедливость формулы (2.3.13) следует из равенства

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S^{n+1}} \text{sign}(\sigma) \cdot \det(\lambda_{p_k}^{j+\sigma(k)})_{j,k=0}^n &= \sum_{\sigma \in S^{n+1}} \text{sign}(\sigma) \lambda_{p_0}^{\sigma(0)} \dots \lambda_{p_n}^{\sigma(n)} \times \\ &\times \det(\lambda_{p_k}^j)_{j,k=0}^n = (\det(\lambda_{p_k}^j)_{j,k=0}^n)^2 = W^2(\lambda_{p_0}, \dots, \lambda_{p_n}). \blacksquare \end{aligned}$$

Ниже, говоря о конечных цепочках Тоды, мы будем указывать только матрицу, построенную по начальным данным, так как она однозначно определяет и длину цепочки (2.3.9), и ее решение.

Вернемся к бесконечной цепочке Тоды (2.3.1) с начальными данными, задаваемыми бесконечной яковиевой матрицей  $L(0)$  с коэффициентами, ограниченными в совокупности. Для фиксированных  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $K \geq 0$  рассмотрим конечную яковиеву матрицу  $L(n, K, 0)$  полученную вырезанием из  $L(0)$  квадратного блока, в левом верхнем углу которого стоит  $b_{n-K}(0)$ , а в правом нижнем — элемент  $b_{n+K+1}(0)$ :

$$L(n, K, 0) = \begin{pmatrix} b_{n-K}(0) & a_{n-K}(0) & & & \\ a_{n-K}(0) & b_{n-K+1}(0) & a_{n-K+1}(0) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n+K}(0) \\ & & & & & b_{n+K+1}(0) \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

Матрица  $L(n, K, 0)$  соответствует ее спектральные данные: собственные значения  $(\lambda_j(n, K))_{j=0}^{2N+1}$ , скачки спектральной меры  $(\varrho_j(n, K))_{j=0}^{2K+1}$  и последовательность моментов  $S_j(n, K) = \sum_{j=0}^{2K+1} \lambda_j(n, K) \varrho_j(n, K)$ . Построим по этим данным при помощи формул (2.3.II) или (2.3.I3) функции  $D_m(n, K, t) (m \in \mathbb{Z})$ .

**Теорема 2.3.1.** Пусть начальные данные  $(a_n(0), b_n(0))_{n=-\infty}^{\infty}$  для системы (2.3.1) ограничены в совокупности некоторой константой  $C$ . Тогда решение системы существует и единственно, причем для некоторого  $\delta = \delta(C)$  на интервале  $[0, \delta)$  решения могут быть представлены в виде равномерно сходящегося ряда

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{nk}}{k!} t^k, \quad b_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{nk}}{k!} t^k \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

где

$$c_{nk} = \frac{d^k}{dt^k} (D_{k-1}(n, k, \cdot) D_{k+1}(n, k, \cdot) / D_k^2(n, k, \cdot))^{\frac{1}{2}}(0),$$

$$d_{nk} = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \ln(D_k(n, k, \cdot) / D_{k-1}(n, k, \cdot))(0). \quad (2.3.15)$$

Доказательство. Возможность представления решений в форме ряда была доказана в лемме 2.3.1. Там же мы показали, что при получении выражений для  $\frac{d^k}{dt^k} a_n(t)$  и  $\frac{d^k}{dt^k} b_n(t)$  в силу уравнений системы (2.3.1) используются лишь уравнения для  $a_j, b_j$  при  $n-k < j < n+k$ . Рассмотрим конечную цепочку Тоды с начальными данными (2.3.14) и обозначим ее решения

$a_{n-k+k}(n, k, t), b_{n-k+k}(n, k, t) (k=0, \dots, 2K+1; a_{n-k-1}(n, k, t) = a_{n+k+1}(n, k, t) = 0)$ .  
Уравнения для  $a_{n-k+k}(n, k, t), b_{n-k+k}(n, k, t) (k=1, \dots, 2K)$  имеют такой же вид, как уравнения системы (2.3.1) для  $a_{n-k+k}(t), b_{n-k+k}(t) (k=1, \dots, 2K)$ . Поэтому для того, чтобы получить выражения для  $k$ -х производных  $a_n(n, k, t)$  и  $b_n(n, k, t)$  при  $k \leq K$  достаточно в выражениях для  $k$ -х производных  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$  всюду заменить  $a_i(t)$  на  $a_i(n, k, t), b_i(t)$  на  $b_i(n, k, t)$ . При этом, так как в силу выбора начальных данных (2.3.14),  $b_i(n, k, 0) = b_i(0) (i = n-k, \dots, n+k+1)$ ,  $a_i(n, k, 0) = a_i(0) (i = n-k, \dots, n+k)$ , то справедливы равенства

$$c_{nk} = \frac{d^k a_n}{dt^k}(0) = \frac{d^k a_n(n, k, \cdot)}{dt^k}(0),$$



$$d_{nk} = \frac{d^k b_n}{dt^k}(0) = \frac{d^k b_n(n, k, \cdot)}{dt^k}(0)$$

[page 122]  
(2.3.16)

Но для решений конечной цепочки Тоды с начальными данными

(2.3.14) справедливы формулы (2.3.12)

$$\begin{aligned} a_{n-k+k}^{\pm}(n, k, t) &= (D_{k-1}(n, k, t) D_{k+1}(n, k, t) / D_k^2(n, k, t))^{\frac{1}{2}} \\ b_{n-k+k}(n, k, t) &= \frac{d}{dt} \ln(D_k(n, k, t) / D_{k-1}(n, k, t)) \\ (k=0, \dots, 2K), \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

где функции  $D_n(n, k, t)$  определены формулами (2.3.11), (2.3.13). Подставляя (2.3.17) в (2.3.16) и полагая  $k=K$ , получаем соотношения (2.3.15). ■

Заметим, что из доказанного следует, что функции

$a_n(t) - a_n(n, k, t), b_n(t) - b_n(n, k, t)$  имеют в точке  $t=0$  нуль  $K$ -го порядка. Необходимо также подчеркнуть, что поскольку в формулировке теоремы  $\delta = \delta(c)$ , а в качестве константы  $c$  можно, как указывалось выше, выбрать  $\|L(0)\|$ , то из равенства (2.3.7) следует, что последовательное применение описанной в теореме процедуры позволяет получить решение системы (2.3.1) для любого  $t \in [0, \infty)$ .

3. В заключение приведем рекуррентные формулы для решений уравнения (2.3.3), описывающего эволюцию матричной спектральной меры, соответствующей оператору  $\mathcal{L}(t)$ . Обозначим  $X(\lambda; t)$  решение уравнения  $\dot{X}(\lambda; t) = \frac{1}{2}(\lambda J - B(t)) X(\lambda; t)$  с начальным условием  $X(\lambda; 0) = I$  ( $\lambda \in \mathbb{R}^1$ ). Тогда решение уравнения (2.3.3) может быть записано в виде

$$dg(\lambda; t) = X(\lambda; t) dg(\lambda; 0) X^*(\lambda; t), \quad (2.3.18)$$





а формулы для моментов будут иметь вид

$$S_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\rho(\lambda; t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda; t) \lambda^n d\rho(\lambda; 0) X^*(\lambda; t).$$

Представим  $X(\lambda; t)$  в форме ряда

$$X(\lambda; t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\lambda) t^k. \quad (2.3.19)$$

Уравнение для  $X(\lambda; t)$  эквивалентно последовательности рекуррентных соотношений

$$(n+1)X_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda J X_n(\lambda) - \sum_{k=0}^n B_{n-k} X_k(\lambda)) \quad (2.3.20)$$

( $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $X_0(\lambda) = 1$ ) , где рядом  $\sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k$  представляется неизвестная функция  $B(t)$  . Из (2.3.19) следует, что  $X_n(\lambda)$

является полиномом  $n$ -й степени :  $X_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n X_{nk} \lambda^k$ .

Запишем с учетом вышесказанного  $S_1(t)$ :

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda; t) \lambda d\rho(\lambda; 0) X^*(\lambda; t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^n \lambda X_k(\lambda) d\rho(\lambda; 0) X_{n-k}^*(\lambda) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^{n-k} X_{kp} S_{p+q+1}(0) X_{n-k-q}^*, \end{aligned}$$

где  $(S_n(0))_{n=0}^{\infty}$  - последовательность моментов, отвечающая мере  $d\rho(\lambda; 0)$  . Если обозначить

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_{00} & & & \\ X_{10} & X_{11} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n0} & \dots & \dots & X_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = (S_{j+k+1}(0))_{j,k=0}^{\infty},$$

то последнее равенство можно переписать в виде

[page 126]

$$S_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n (\mathcal{X} \mathcal{S} \mathcal{X}^*)_{k, n-k}. \quad (2.3.21)$$

Напомним теперь, что  $S_1(t) = \begin{pmatrix} b_{-1}(t) & a_{-1}(t) \\ a_{-1}(t) & b_0(t) \end{pmatrix}$ , а

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{-1}(t) & 2a_{-1}(t) \\ -2a_{-1}(t) & -b_0(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{2} J S_1(t) - \frac{1}{2} S_1(t) J,$$

следовательно

$$B_n = \sum_{k=0}^n \left( \frac{3}{2} J (\mathcal{X} \mathcal{S} \mathcal{X}^*)_{k, n-k} - \frac{1}{2} (\mathcal{X} \mathcal{S} \mathcal{X}^*)_{k, n-k} J \right) \quad (2.3.22)$$

$(n \in \mathbb{Z}_+).$

Подставляя (2.3.21) в (2.3.19) и приравнявая коэффициенты при степенях  $\lambda$ , мы получим

$$2(n+1) J X_{n+1, k} = X_{n, k-1} + \sum_{j=k}^n \sum_{s=0}^{n-j} \left( \frac{3}{2} J (\mathcal{X} \mathcal{S} \mathcal{X}^*)_{s, n-j-s} - \frac{1}{2} (\mathcal{X} \mathcal{S} \mathcal{X}^*)_{s, n-j-s} J \right) X_{j, k} \quad (2.3.23)$$

Для всех  $X_{pq}$ , фигурирующих в правой части (2.3.22) выполняется условие  $p \leq n$ ,  $p-q \leq n-k$ . Следовательно, (2.3.22) являются рекуррентными соотношениями, позволяющими, зная матрицу  $\mathcal{S}$  и  $X_{00} = 1$ , последовательно восстановить при произвольном  $n \in \mathbb{N}$  сначала  $X_{11}, \dots, X_{nn}$ , затем  $X_{10}, X_{21}, \dots, X_{n+1, n}$ , и так далее, при любом  $k$ ,  $X_{k0}, X_{k+1, 1}, \dots, X_{n+k, k}$ . Таким образом, по начальным данным для системы (2.3.1)  $\mathcal{L}(0)$  можно построить матрицу  $\mathcal{S}$ , затем при помощи рекуррентных соотношений (2.3.23) восстановить элементы матрицы  $\mathcal{X}$ , которые позволяют получить решение (2.3.18), (2.3.19) уравнения эволюции спектральной меры. Решая обратную спектральную задачу для меры

$dg(\lambda; t)$  , получаем решения бесконечной цепочки Тоды [page 127]  
(2.3.1).

В качестве примера приведем выражения для  $X_{nn}, X_{n+1n}$  ,  
полученные из соотношений (2.3.23)

$$X_{nn} = \frac{1}{2^n n!} J^n, \quad X_{n+1n} = \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!} \sum_{k=0}^n J^{k+1} \times$$

$$\times \left( \frac{3}{2} J S_1(0) - \frac{1}{2} S_1(0) J \right)^{n-k}.$$

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.- М.: Мир, 1987.- 480 с.

2. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов.- М.: Физматгиз, 1961.- 310 с.

3. Березанский Ю.М. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи //Докл. АН СССР.- 1985.- 281, № 1.- С. 16-19.

4. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка //Тр. Моск. мат. об-ва.- 1956.- 5.- С. 203-268.

5. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.- Киев: Наук. думка, 1965.- 800 с.

6. Березанский Ю.М., Гехтман М.И. Обратная задача спектрального анализа и неабелевы цепочки нелинейных уравнений // Укр. мат. журн.- 1990.- 42, № 6.- С.

7. Березанский Ю.М., Гехтман М.И., Шмойш М.Е. Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений //Укр. мат. журн.- 1986.- 38, № 1.- С. 84-89.

8. Березанский Ю.М., Шмойш М.Е.

9. Вадати М. Обобщенная матричная форма метода обратной задачи рассеяния //В кн.: Солитоны (под ред. Р.Буллаф, Ф.Кодри).- М.: Мир, 1983.- С. 310-323.

10. Гехтман М.И. Интегрирование неабелевой цепочки Тоды // XI Всесоюзн. школа по теории операторов в функцион. пространствах. Тез. докл.- Челябинск: Челябинский политехнический ин-т, 1986.- В.2.- С. 31.

II. Гехтман М.И. Интегрирование неабелевых дифференциально-разностных цепочек на полуоси методом обратной спектральной задачи //XIV Всесоюзн. школа по теории операторов в функцион. пространствах. Тез. докл. - Новгород: Новгородский гос. пед.ин-т, 1989. - Ч. I. - С. 58.

12. Гехтман М.И. Интегрирование неабелевых цепочек типа Тоды //Функцион. анализ и его прил. - 1990. -

13. Гусейнов Г.Ш. О восстановлении разностного оператора второго порядка по спектральной матрице //Мат. заметки. - 1982. - 32, № 5. - С. 734-746.

14. Гусейнов Г.Ш. Определение бесконечной несамосопряженной матрицы Якоби по ее обобщенной спектральной функции //Мат. заметки. - 1978. - 23, № 2. - С. 237-247.

15. Далецкий А.Ю., Подколзин Г.Б. Групповой подход к интегрированию бесконечной цепочки Тоды //Укр. мат. журн. - 1988. - 40, № 4. - С. 518-521.

16. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1970. - 534 с.

17. Жернаков Н.В. Прямая и обратная задачи для периодической якобиевой матрицы //Укр. мат. журн. - 1986. - 38, № 6. - С. 785-788.

18. Жернаков Н.В. Интегрирование цепочек Тоды в классе операторов Гильберта-Шмидта //Укр. мат. журн. - 1987. - 39, № 5. - С. 645-648.

19. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. - М.: Наука, 1986. - 528 с.

20. Кишакевич Ю.Л. Спектральная функция типа Марченко разностного оператора четного порядка //Мат. заметки. - 1972. - II, № 4. - С. 437-446.



21. Кнутаевич Ю.Л. Спектральная функция типа Марченко <sup>base 1301</sup> конечной системы разностных уравнений //Теория функций, функционал. анализ и их приложения.- 1972.- Вып. 16.- С. 59-68.

22. Крейн М.Г. Бесконечные -матрицы и матричная проблема моментов //Докл. АН СССР.- 1949.- 69, № 2.- С. 125-128.

23. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.- М.: Наука, 1967.- 464 с.

24. Кричевер И.М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.//Успехи мат. наук.- 1977.- 32, вып. 6.- С. 183-208.

25. Кричевер И.М. Периодическая неабелева цепочка Тоды и ее двумерное обобщение //Успехи мат. наук.- 1981.- 36, вып. 2.- С. 72-80.

26. Манаков С.В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических средах //ЖЭТФ.- 1974.- 67, № 2.- С. 543-555.

27. Марченко В.А. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка //Мат. сб.- 1960.- 52, № 2.- С. 739-788.

28. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике.- М.: Мир, 1989.- 325 с.

29. Переломов А.И. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. Цепочка Тоды.- М.: Препринт. Ин-т теорет. и эксперим. физики АН СССР, 1983.- 63 с.

30. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Алгебры Ли и малаксовы уравнения со спектральным параметром на эллиптической кривой //Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 6. Зап. науч. семинара ЛОМИ, 1986.- 150.- С. 104-118.

31. Рофе-Бекетов Ф.С. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях //Мат. сб.- 1960.- 51, # 3.- С. 293-342. [page 131]

32. Сахнович Л.А. О полубесконечной цепочке Toda //ТМФ.- 1989.- # 10.- С. 12-23.

33. Сеге Г. Ортогональные многочлены.- М.: ГИИИ, 1962.- 500 с.

34. Тарнопольский В.Г. Про самосопряженность ризницевых операторів з операторними коефіцієнтами //Доп. АН УРСР.- 1959.- II.- С. II89-II92.

35. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.- М.: Наука, 1986.- 528 с.

36. Теория солитонов. Метод обратной задачи / В.Е.Захаров, С.В.Манакон, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский.- М.: Наука, 1980.- 320 с.

37. Toda М. Теория нелинейных решеток.- М.: Мир, 1983.- 294 с.

38. Шмойш М.Е. Неизоспектральные деформации якобиевых матриц и нелинейные разностные уравнения //Укр. мат. журн.- 1989.- 41, # 2.- С. 282-285.

39. Ямилов Р.И. О классификации дискретных эволюционных уравнений //Успехи мат. наук.- 1983.- 38, вып. 6.- С. 155-156.

40. Ямилов Р.И. Обобщения цепочки Toda и законы сохранения //Уфа: Препринт. Ин-т математики БНЦ УрО АН СССР.- 20 с.

- 4.1. Berezanski Yu. M. The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem // Repts Math. Phys. - 1986. - 24, 51 - P. 21-47.
- 4.2. Brushi M., Manakov S. V., Ragnisco O., Levi D. The non-abelian Toda lattice (discrete analogue of the matrix Schrödinger spectral problem) // Journ. Math. Phys. - 1980. - 21. - P. 2749-2753.
- 4.3. Deift P., Li L. C., Tomei C. Toda flows with infinitely many variables // J. Funct. Anal. - 1985. - 64, 3. - P. 358-402.
- 4.4. Flaschka H. The Toda lattice. II. Existence of integrals // Phys. Rev. - 1974. - B9, 6. - P. 1924-1925.
- 4.5. Flaschka H. On the Toda lattice. II. Inverse scattering solution // Prog. Theor. Phys. - 1974. - 51, 3. - P. 703-716.
- 4.6. Kac M., van Moerbeke. On some periodic Toda lattice // Proc. Nat. Ac. Sci. - 1975. - 72, 4. - P. 1627-1629.
- 4.7. J. Moser. Finitely many mass points under the influence of an exponential potential // Lect. Notes in Phys. - 38. - P. 97-122.